

Capitolul 1

Aspectele fizice ale modelării electromagnetice

1.1 Mărimile caracteristice ale electromagnetismului

Câmpul electromagnetic este o formă de existență a materiei, diferită de substanță, capabilă să acumuleze și să transporte energie, dar și să interacționeze cu corpurile din punct de vedere mecanic, termic și/sau chimic.

Mărimile fizice caracteristice electromagnetismului se pot clasifica în următoarele trei categorii:

- Mărimi caracteristice *câmpului* electromagnetic;
- Mărimi caracteristice *corpurilor*;
- Mărimi ce caracterizează *efectele* câmpului electromagnetic.

După modul în care se raportează la spațiu, mărimile sunt *locale*, atunci când descriu starea unui punct din spațiu sau *globale*, atunci când descriu starea unei infinități de puncte.

Dacă o mărime este definită la un moment de timp, atunci ea se numește *instantanee*, iar dacă ea se referă la un interval de timp, ea se numește *de proces*.

1.1.1 Mărimile locale ale câmpului electromagnetic

Fiecare din componentele electrică sau magnetică este caracterizată local de doi vectori tridimensionali, **intensitatea** și **inducția** câmpului respectiv:

- **E** - intensitatea câmpului electric;

- $\mathbf{D}$ - inducția câmpului electric;
- $\mathbf{H}$ - intensitatea câmpului magnetic;
- $\mathbf{B}$ - inducția câmpului magnetic.

Aceste patru mărimi vectoriale caracterizează complet, local și instantaneu câmpul electromagnetic dintr-un punct din spațiu, la un moment de timp (fig. 1.1). Pentru a caracteriza câmpul într-un domeniu spațial pe un interval de timp cele patru mărimi devin funcții vectoriale de poziție și timp. Matematic cele patru sunt deci **funcții definite pe domeniul spațio-temporal cuadridimensional, cu valori în spațiul tridimensional**.

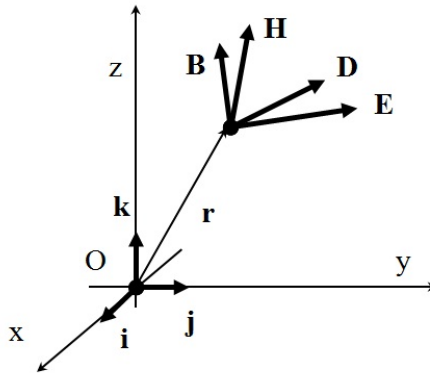


Figura 1.1: Mărimi locale ale câmpului electromagnetic

Intensitatea câmpului electric

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **câmpul electric din punct de vedere longitudinal**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z$. Unitatea de măsură a intensității câmpului : Volt pe metru [V/m].

Inducția electrică

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu comportarea **transversală a câmpului electric**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 17

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{D} = iD_x + jD_y + kD_z$.
Unitatea de măsură: Coulomb pe metru pătrat $[C/m^2]$.

Intensitatea câmpului magnetic

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **câmpul magnetic din punct de vedere longitudinal**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.3)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{H} = iH_x + jH_y + kH_z$.
Unitatea de măsură: Amper pe metru $[A/m]$.

Inducția magnetică

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu comportarea **transversală a câmpului magnetic**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z$.
Unitatea de măsură: Weber pe metru pătrat sau Tesla $[Wb/m^2 = T]$.

1.1.2 Mărimile locale ale corpurilor

În interacțiune cu câmpul electromagnetic corpurile își schimbă starea. Pentru a caracteriza această schimbare de stare electromagnetică se folosesc următoarele mărimi fizice locale (fig. 1.2):

- ρ - densitatea de volum a sarcinii electrice;
- $\mathbf{J}$ - densitatea de curent electric.

Aceste mărimi caracterizează local și instantaneu corpurile. Pentru a caracteriza starea unui punct din corp pe un interval de timp, cele două mărimi devin **funcții** de poziție și timp, una scalară și alta vectorială, definite pe domeniul corpului și intervalul de timp.

Densitatea de sarcină

Mărime fizică scalară ce caracterizează local și instantaneu **starea de electrizare** a corpurilor:

$$\rho = f(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

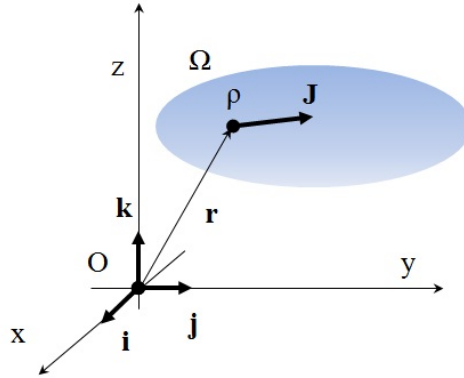


Figura 1.2: Mărimile locale ale corpurilor

cu $f : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ este vectorul de poziție cartezian.

Unitatea de masura: Coulomb pe metru cub $[\text{C}/\text{m}^3]$.

Densitatea de curent

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **starea electrocinetică** a corpurilor:

$$\mathbf{J} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

cu $\mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, iar $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ vectorul de poziție cartezian.

Unitatea de masura: Amper pe metru patrat $[\text{A}/\text{m}^2]$.

1.1.3 Mărimi globale ale câmpului electromagnetic

Fiecare mărime locală definește prin integrare pe o varietate spațială câte o mărime globală. Intensitățile câmpului se integrează pe varietăți unidimensionale (curbe) - integrale simple, iar inducțiile se integrează pe varietăți bidimensionale (suprafețe) - integrale duble (fig. 1.3):

- **tensiunea electrică** u se obține prin integrarea intensității câmpului electric $\mathbf{E}$ pe curbe închise sau deschise;
- **fluxul electric** ψ se obține prin integrarea inducției electrice $\mathbf{D}$ pe suprafețe;
- **tensiunea magnetică** u_m se obține prin integrarea intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}$ pe curbe închise sau deschise;

- **fluxul magnetic** φ se obține prin integrarea inducției magnetice $\mathbf{B}$ pe suprafețe.

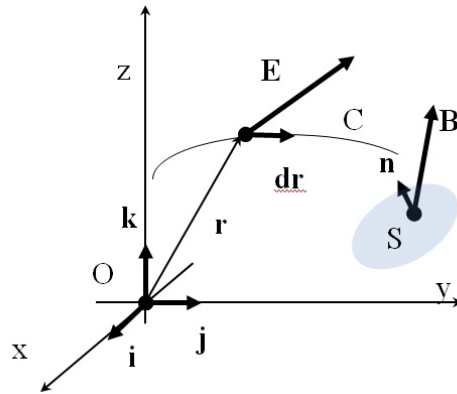


Figura 1.3: Mărimile globale ale câmpului electromagnetic

Aceste mărimi caracterizează global și instantaneu câmpul electromagnetic pe varietățile pe care sunt definite. Matematic ele sunt funcții reale de variabilă reală, **definite pe intervalul de timp al procesului considerat. Fiind asociate unor varietăți orientate, vom spune că au sens de referință.** Schimbarea sensului de referință (orientarea varietății) determină schimbarea semnului mărimii globale. Trebuie să mai luăm notă de un aspect extrem de important, referitor la orientarea varietăților, deci implicit referitor la sensurile de referință. Acestea trebuie să respecte următoarele **reguli de orientare**:

- Suprafețele închise se orientează întotdeauna spre exterior.
- Suprafețele deschise se orientează conform regulii burghiului drept, față de felul în care sunt orientate curbele lor de frontieră.
- Integralele curbilinii au elementul tangențial de linie orientat în sensul curbei, iar integralele pe suprafețe au elementul vectorial de arie $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$, orientat în sensul versorului $\mathbf{n}$, normal, la suprafață, care trebuie să respecte regulile de orientare anterioare.

Tensiunea electrică

În consecință tensiunea electrică este o mărime scalară ce caracterizează global și instantaneu câmpul electric de-a lungul unei curbe C , mărime derivată, definită de circulația lui $\mathbf{E}$:

$$u(t) = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Unitatea de masura: Voltul [V].

Tensiunea este egală cu componenta tangențială a intensității câmpului, mediată pe curba C , înmulțită cu lungimea curbei: $u = E_{t,med} \cdot l_C$.

Definită pe curbe închise, ea se mai numește și *tensiune electro-motoare (t.e.m.)* și se mai notează cu e .

Matematic, tensiunea este o funcție reală de variabilă reală - timpul, asociată unei curbe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$u(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula U .

Fluxul electric

Fluxul electric este o mărime fizică scalară care descrie global câmpul electric de pe suprafața închisă sau deschisă, este o mărime derivată, definită de fluxul inducției $\mathbf{D}$:

$$\psi(t) = \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.9)$$

Unitatea de măsură: Coulombul [C].

În consecință, fluxul este egal cu componenta normală a inducției, mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $\psi = D_{n,med} \cdot A_s$.

Matematic, fluxul este o funcție reală de variabilă reală - timpul, asociată unei suprafețe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$\psi(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Ψ .

Tensiunea magnetică

Tensiunea magnetică este o mărime scalară ce caracterizează global și instantaneu câmpul magnetic de-a lungul unei curbe C , mărime derivată, definită de circulația lui $\mathbf{H}$:

$$u_m(t) = \int_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.11)$$

Unitatea de măsură: Amperul [A].

În consecință tensiunea este egală cu componenta tangențială a intensității câmpului, mediată pe curba C și înmulțită cu lungimea curbei: $u_m = H_{t,med} \cdot l_C$.

Definită pe curbe închise, ea se mai numește și *tensiune magneto-motoare (t.m.m.)*.

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 21

Matematic, tensiunea magnetică este o funcție reală de variabilă reală - timpul , asociată unei curbe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$u_m(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula U_m .

Fluxul magnetic

Fluxul magnetic este o mărime fizică scalară, care descrie global câmpul magnetic de pe suprafața S , mărime derivată, definită de fluxul inducției $\mathbf{B}$:

$$\varphi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.13)$$

Unitatea de măsură: Weberul [Wb].

În consecință fluxul este egal cu componenta normală a inducției, mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $\varphi = B_{n,med} A_s$.

Matematic, fluxul magnetic este o funcție reală de variabilă reală - timpul:

$$\varphi(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Φ .

1.1.4 Mărimi globale ale corpurilor

Ca și mărimile globale ale câmpului, marimile globale ale corpurilor sunt asociate mărimilor locale și sunt obținute prin integrarea acestora pe diferite varietăți:

- q - **sarcina electrică** se obține prin integrarea pe domeniul corpurilor a densității de sarcină.
- i - **intensitatea curentului electric** se obține prin integrarea pe suprafețe ce aparțin corpurilor a densității de curent $\mathbf{J}$.

Aceste mărimi sunt funcții scalare de timp ce caracterizează global și instantaneu starea corpurilor pe varietățile pe care sunt definite. Deoarece este definită pe o varietate orientată, curentul are sens de referință, dar sarcina nu are, fiind definită pe o varietate neorientată.

Sarcina electrică

Sarcina electrica este o mărime fizică scalară, care descrie global **starea de electrizare** a unui corp, definită de integrala triplă, pe domeniul corpului a densității de sarcină:

$$q(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) dv. \quad (1.15)$$

Unitatea de măsură: Coulomb [C].

În consecință sarcina este egală cu densitatea de sarcină mediată pe domeniul Ω și înmulțită cu volumul domeniului: $q = \mathbf{r}_{med} \cdot V_{\Omega}$. Matematic, sarcina este o funcție de timp asociată domeniului Ω , definită pe intervalul de timp al procesului analizat:

$$q = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Q .

Curentul electric

Intensitatea curentului electric, pe scurt curentul este o mărime fizică scalară, care descrie global **starea electrocinetică** de pe o suprafața S sau Σ , definită de fluxul densității de curent $\mathbf{J}$:

$$i(t) = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.17)$$

Unitatea de masura: Amperul [A].

În consecință curentul este egal cu componenta normală a densității de curent mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $i = J_{n,med} A_s$. Matematic, curentul este o funcție reală de variabilă reală, definită pe intervalul de timp cât durează procesul analizat și asociată unei suprafețe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$i(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Dacă funcția este constantă atunci valoarea ei se notează cu majuscula I .

1.1.5 Recapitularea mărimilor electromagnetice

Perechile de mărimi globale-locale caracteristice electromagnetismului macroscopic sunt sintetizate în Tabelul (1.1). Toate mărimile globale sunt scalare, iar mărimile locale sunt vectoriale, cu excepția densității de sarcină. Mărimile locale

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 23

Mărimi locale	Mărimi globale
Intensitate câmp electric $\mathbf{E} = \mathbf{t} \cdot du/ds$ [V/m]	Tensiunea electrică $u = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}$ [V]
Intensitate câmp magnetic $\mathbf{H} = \mathbf{t} \cdot du_m/ds$ [A/m]	Tensiunea magnetică $u_m = \int_C \mathbf{B} d\mathbf{r}$ [A]
Inducția electrică $\mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot d\psi/dA$ [C/m ²]	Fluxul electric $\psi = \int \mathbf{D} d\mathbf{A}$ [C]
Inducția magnetică $\mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot d\varphi/dA$ [Wb/m ²] = [T]	Fluxul magnetic $\varphi = \int \mathbf{B} d\mathbf{A}$ [Wb]
Densitatea de sarcină $\rho = dq/dv$ [C/m ³]	Sarcina electrică $q = \int \rho dv$ [C]
Densitatea de curent $\mathbf{J} = d\mathbf{i}/d\mathbf{A}$ [A/m ²]	Curentul electric $i = \int \mathbf{J} d\mathbf{A}$ [A]

Tabela 1.1: Marimile macroscopice ale câmpului electromagnetic

definesc complet, analitic, atât câmpul cât și corpurile, în timp ce mărimile globale au un caracter sintetic, descriind doar starea medie a câmpului și a corpurilor dintr-o mulțime infinită de puncte. Cunoașterea mărimilor locale determină univoc, prin integrare mărimea globală, în schimb trecerea inversă nu este univoca.

Dupa cum s-a văzut, mărimile globale au valori egale cu componentele longitudinale sau transversale ale câmpului, mediate pe varietatea de definiție și înmulțite cu măsura varietății (lungime, arie sau volum, în cazul varietăților 3D).

Deoarece sunt destinate integrării pe anumite varietăți, este evident că mărimile locale sunt, de fapt, *forme diferențiale*. http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_form. Intensitățile câmpurilor sunt forme diferențiale de ordinul întâi (se integrează pe curbe - care sunt varietăți de ordinul unu), inducțiile și densitatea de curent sunt forme diferențiale de ordinul doi (se integrează pe suprafețe, care sunt varietăți de ordinul doi), iar densitatea de sarcină este o formă diferențială de ordinul trei (se integrează pe varietăți tridimensionale, domenii de volum nenul). Această observație explică de ce spunem că intensitatea caracterizează câmpul din punct de vedere *longitudinal* (de-a lungul curbei) iar inducția caracterizează câmpul din punct de vedere *transversal* (componenta normală la suprafață).

Am constatat că valorile medii ale componentelor mărimilor locale pe varietăți se pot calcula împărțind mărimea globală la măsura varietății. Dacă tindem această măsură spre zero, la limita se obține valoarea mărimii locale în punctul în care s-a strâns varietatea. În consecință se poate stabili și relația inversă, evidențiată în Tabelul 1.1, prin care mărimile locale sunt "derivatele fizice" ale mărimilor globale. În acest caz versorii $\mathbf{t}$ și $\mathbf{n}$, care dau orientarea mărimii locale corespund direcției pentru care limita ce definește derivata are valoare maximă, sau se obțin derivând succesiv după axele sistemului de coordonate. Aceste relații evidențiază metode de măsurare pentru mărimile locale, bazate pe valori ale mărimilor globale, măsurate pe varietăți de dimensiuni foarte mici. Dacă se împarte mărimea globală la măsura varietății ei, se obține de fapt doar o componentă a valorii medii a mărimii locale. Dacă în schimb varietatea este de dimensiuni foarte mici, atunci variația mărimii locale pe varietate poate fi neglijată și valoarea medie devine chiar valoarea locală.

Cele șase mărimi locale, patru ale câmpului și două ale corpurilor sunt mărimile primitive ale electromagnetismului macroscopic. Mărimile globale, fiind definite ca integrale ale mărimilor locale, sunt mărimi derivate.

În modelarea electromagnetică bazată pe analiza clasică, mărimile locale sunt funcții mărginite, integrabile. Totuși, în practică se folosesc în modelare, de multe ori distribuții de câmp, sarcină sau curent degenerate, care nu pot fi reprezentate matematic prin astfel de funcții. De exemplu, un corp de dimensiuni neglijabile (punctiform) electricizat cu sarcina q , plasat în origine. Densitatea de sarcină este în acest caz o funcție generalizată (o distribuție) de tip Dirac:

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (1.19)$$

Tot o distribuție este densitatea de sarcină distribuită uniform pe planul $z = 0$, cu densitatea superficială $\rho_s = dq/dA$ [C/m^2], careia îi corespunde o densitate de sarcină:

$$\rho(x, y, z) = \rho_s\delta(z). \quad (1.20)$$

Folosind funcții generalizate, inclusiv distribuții în locul funcțiilor clasice, cadrul funcțional se extinde foarte mult și modelarea devine mult mai flexibilă. Dar mărimile locale pot avea singularități, puncte în care mărimile nu sunt mărginite. Integrarea mărimilor locale este o operație esențială, nu numai în definirea mărimilor globale ci și, după cum se va vedea ulterior, în calculul puterii și energiei, când vor fi integrate pe varietăți tridimensionale, produse scalare de tipul **ED**, **BH**, **JE**. Aceste operații duc în mod natural la spațiul funcțiilor L^2 de pătrat integrabil, care reprezintă câmpuri de energie finită. Folosirea integralei Lebesgue în locul integralei Riemann aduce mai multe avantaje legate de formularea corectă a problemelor, existența și continuitatea soluției. Dar această decizie schimbă complet cadrul funcțional, de la cel clasic al funcțiilor continue și derivabile la cadrul funcțional modern, în care câmpurile devin elemente ale spațiului Lebesgue L^2 , al funcțiilor de pătrat integrabil http://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space. Elementele acestui spațiu sunt clase de echivalență de funcții egale aproape peste tot. Lucrurile pot continua, prin introducerea spațiilor Sobolev http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space, atunci când generalizăm noțiunea de derivată sau prin folosirea teoriei distribuțiilor a lui Schwartz [http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)).

În continuare vom folosi termenul de funcție generalizată atât pentru distribuții cât și pentru elementele spațiilor Lebesgue, alcătuite din clase de echivalență de funcții egale aproape peste tot.

În continuare vom considera toate mărimile ce caracterizează câmpul și corpurile, elemente ale spațiului L^2 ($\Omega \in \mathbb{R}^3$). Avantajul constă în faptul că acesta este un spațiu Hilbert, cadrul natural pentru a demonstra riguros diferite teoreme, care țin

de formularea corectă a problemeleor de câmp și soluționarea lor, precum și de a studia convergența soluției numerice.

Trecerea de la contextul clasic la cadrul funcțional modern, chiar dacă aduce multe avantaje, cere un mare sacrificiu, și anume renunțarea la conceptul clasic de funcție, prin care fiecărui punct din domeniul de definiție îi corespunde o valoare din codomeniu. Valoarea funcției într-un punct nu mai are sens în contextul funcțional modern, iar conceptul de funcție capătă un sens abstract.

Acesta este un sacrificiu de neacceptat pentru mulți ingineri, neobișnuiți cu raționamente abstracte. Acestora le propunem să își închipuie că în fiecare clasă de echivalență se află un element care se poate aproxima aproape peste tot, oricât de bine cu o funcție clasică, și să adopte acea funcție ca reprezentant al clasei de echivalență (cum se întâmplă în cazul funcțiilor suficient de netede). Astfel se poate continua folosirea reprezentărilor intuitive clasice, chiar și în cadrul modern.

Deoarece integrala unui polinom sau a unei funcții trigonometrice are aceeași expresie, chiar dacă este de tip Riemann sau Lebesgue, putem să nu luăm în considerare diferențele între concepția clasică și cea modernă, folosind reprezentanți clasici pentru clasele de echivalențe de funcții, întâlnite în analiza funcțională. Pe parcurs, se va vedea că falia conceptuală dintre cele două abordări devine tot mai evidentă. Dar menținerea în conceptul clasic, fără trecerea pe celălalt versant, nu pot fi înțelese sensurile profunde ale modelării electromagnetice cu elemente finite. Importanța acestor aspecte va fi mai clară în capitolul dedicat modelării matematice.

1.2 Legile generale ale electromagnetismului

Legile unei teorii fizice sunt afirmațiile de bază referitoare la mărimile primitive, fundamentale pentru acea teorie. Deoarece aceste afirmații au un caracter axiomatic, ele nu se demonstrează în cadrul teoriei, ci acestea rezultă prin inducție incompletă, prin generalizarea observațiilor experimentale. O teorie fizică este corect axiomatizată, doar dacă legile ei sunt necontradictorii, independente, și complete, atât din punct de vedere matematic cât și din punct de vedere fizic.

Legile electromagnetismului macroscopic se împart în trei mari categorii:

- legile **generale**, ale căror forme nu depind de corpurile în care acestea se aplică;
- legile **de material**, ale căror forme depind de substanța în care acestea se aplică;
- legile **de transfer**, descriu efectele ne-electromagnetice ale câmpului electromagnetic.

În continuare vor fi prezentate pe scurt legile electromagnetismului macroscopic. Pentru mai multe detalii puteți consulta:

[69],[88], [122], [101], [29], [105].

În aceste lucrări veți găsi mult mai multe discuții, interpretări, exemple, aplicații, inclusiv demonstrația teoremelor fundamentale, dar și a altor consecințe.

1.2.1 Legea fluxului electric

1. **Enunț:** Fluxul electric pe orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică din domeniul interior suprafeței.

2. **Forma globală - integrală:**

$$\psi_{\Sigma} = q \Rightarrow \oint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \rho dv, \quad (1.21)$$

relație valabilă pentru orice domeniu $\mathcal{D}$, marginit de frontiera sa $\Sigma = \partial\mathcal{D}$.

3. **Forma locală:**

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.22)$$

este o consecință directă a relației (1.21) transformată prin relația Gauss-Ostrogradski.

Forma generală a legii este cea globală. În sensul matematicii clasice, relația (1.22) se poate aplica doar dacă $\mathbf{D}$ este o funcție continuă și derivabilă, altfel nu are sens divergența. În schimb, relația (1.21) este valabilă și în cazul câmpurilor discontinue.

4. **Forma pe suprafețe de discontinuitate:**

La trecerea prin suprafețe de discontinuitate (de la un corp la altul) componenta normală a inducției electrice are saltul:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{D} = \rho_s \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Rightarrow D_{n1} = D_{n2} \quad (1.23)$$

și se conservă, dacă suprafața este neelectrizată ($\rho_s = 0$). Relația (1.23) este o consecință directă a relației (1.21), aplicată pe un domeniu cilindric care tinde către un punct de pe suprafața de discontinuitate.

Cele două forme: locală și pe suprafețele de discontinuitate au semnificații diferite în cazul folosirii funcțiilor clasice, dar în cazul folosirii funcțiilor generalizate, relația (1.23) este un caz particular al relației (1.22).

5. **Semnificație fizică:**

Orice corp electrizat ($\rho \neq 0$) produce în vecinătatea sa un câmp electric ($D \neq 0$). Legea evidențiază o cauză a câmpului electric și anume electrizarea corpurilor.

6. **Consecință calitativă (forma și orientarea liniilor câmpului electric):**

Liniile câmpului inducției electrice D sunt curbe deschise, ce pornesc de pe sarcinile pozitive și se opresc pe cele negative. Ele sunt neîntrerupte în domeniile neutre.

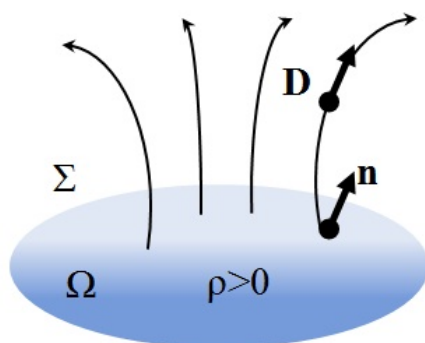


Figura 1.4: Legea fluxului electric

1.2.2 Legea fluxului magnetic

1. **Enunț:** Fluxul magnetic φ_Σ printr-o suprafață închisă oarecare Σ este nul.

2. **Forma globală - integrală:**

$$\varphi_\Sigma = 0 \Rightarrow \oint_\Sigma \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0. \quad (1.24)$$

3. **Forma locală:**

Se aplică teorema Gauss-Ostrogradski relației (1.24), se ține seama că volumul v_Σ , este arbitrar și rezultă:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.25)$$

4. **Forma pe suprafețe de discontinuitate:**

Ca și în cazul anterior:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}. \quad (1.26)$$

Componenta normală a inducției magnetice se conservă la trecerea prin orice suprafață de discontinuitate.

5. **Semnificație fizică:**

O consecință imediată a acestei legi este faptul că nu există sarcini magnetice (adevărate), similare celor electrice.

6. **Consecință calitativă:**

Liniile inducției magnetice sunt curbe continui, închise - care nu au punct de început sau de sfârșit.

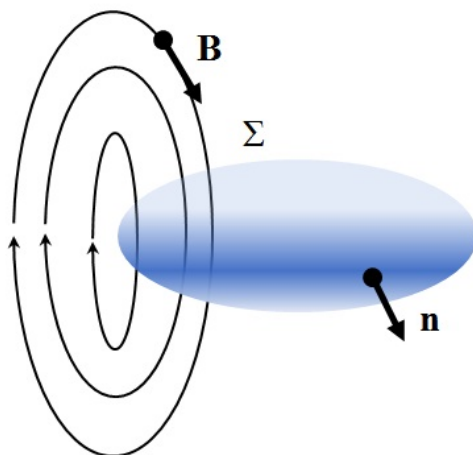


Figura 1.5: Legea fluxului magnetic

1.2.3 Legea inducției electromagnetice

1. **Enunț:** Tensiunea electrică de-a lungul unei curbe închise Γ este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic printr-o suprafață S care se sprijină pe curba Γ .

Ipoteza Hertz: curba Γ și suprafața S_Γ sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor. În consecință inducția electromagnetică poate fi de transformare și/sau de mișcare.

2. Forma globală - integrală:

$$u_{\Gamma} = -\frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad (1.27)$$

în care suprafața S_{Γ} este arbitrară iar Γ este frontiera sa.

3. Forma locală:

Pentru corpuri imobile ($v = 0$), transformând relația (1.27) cu formula lui Stokes se obține ecuația vectorială cu derivate parțiale:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuație a lui Maxwell*.

În sens caldic, această ecuație are sens doar dacă $\mathbf{E}$ are variație spațială continuă și netedă iar $\mathbf{B}$ are variație temporală derivabilă. Aceste restricții dispar, dacă se operează cu distribuții [http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)).

În cazul mediilor în mișcare, legea inducției electromagnetice are o formă mai complicată:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}), \quad (1.29)$$

în care intervine viteza locală a mediului v . Demonstarea formelor locale se face transformând (1.28) cu relația lui Stokes și identificând integranzii. În mediile mobile se calculează "derivata de flux", conform ipotezei lui Hertz.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

O altă consecință a relației (1.27) referitoare la intensitatea câmpului electric de o parte și alta a unei suprafețe de discontinuitate este

$$\text{rot}_s \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.30)$$

sau echivalent:

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}, \quad (1.31)$$

relație care afirmă continuitatea componentei tangențiale a intensității câmpului electric la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate.

- 5. Semnificație fizică:** Variația în timp a câmpului magnetic induce un câmp electric, fenomen cunoscut sub numele de inducție electromagnetică. Este pusă în evidență astfel o a doua cauză posibilă a câmpului electric.

6. **Liniile câmpului electric indus:** sunt curbe închise, înconjoară câmpul magnetic inductor, sensul lor depinde de sensul liniilor câmpului magnetic inductor și de modul de variație al acestuia în timp. Câmpul electric indus de un câmp magnetic descrescător în timp are sensul dat de regula burghiului drept și este opus în cazul câmpului inductor crescător.

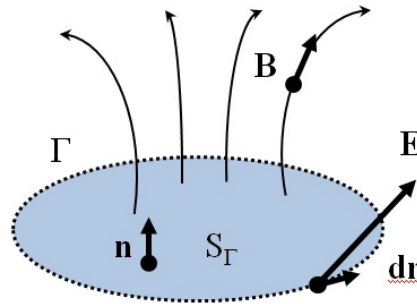


Figura 1.6: Legea inducției electromagnetice

În baza ipotezei lui Hertz, inducția electromagnetică poate fi de *transformare* (în absența mișcării) și/sau de *mișcare* (poate să apară și în câmpuri magnetice constante în timp).

1.2.4 Legea circuitului magnetic

1. **Enunț:** Tensiunea magnetică de-a lungul unei curbe închise Γ arbitrară este egală cu suma dintre curentul printr-o suprafață ce se sprijină pe curba Γ și viteza de creștere în timp a fluxului electric prin acea suprafață. Ipoteza lui Hertz se aplica și în acest caz.
2. **Forma globală - integrală:**

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (1.32)$$

relație numită forma globală a legii, sau forma integrală a legii:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{D} d\mathbf{A}, \quad (1.33)$$

relații valabile pentru o suprafață arbitrară S_Γ , marginită de frontiera sa $\Gamma = \partial S_\Gamma$.

3. Forma locală:

Utilizând teorema lui Stokes, aplicată relației (1.33) se obține în cazul mediilor imobile ecuația cu derivate parțiale, liniară și de ordinul întâi

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.34)$$

cunoscută sub numele de *prima ecuație a lui Maxwell*.

În cazul mediilor în mișcare, forma locală este:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \text{rot} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (1.35)$$

obținută în baza ipotezei lui Hertz, folosind derivata de flux. Dacă se folosește teoria distribuțiilor, forma locală este la fel de generală ca și forma globală.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

Dacă pe suprafață există o distribuție de curent superficial cu densitatea $\mathbf{J}_s$ [A/m], atunci:

$$\text{rot}_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s. \quad (1.36)$$

iar dacă $\mathbf{J}_s = 0$:

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{H}_{1t}, \quad (1.37)$$

care afirmă continuitatea componentei tangențiale a câmpului magnetic la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care nu este pânză de curent.

- 5. Semnificație fizică:** Această lege evidențiază cauzele câmpului magnetic: curentul electric de conducție și variația în timp a câmpului magnetic (curentul de deplasare). Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise care înconjoară liniile curentului inductor și au sensul dat de regula burghiului drept.

Fenomenele fundamentale descrise de cele patru legi generale sunt reprezentate simbolic în (fig. 1.8).

Deoarece conform ecuațiilor lui Maxwell, inducțiilor electrice/magnetice li se aplică operatorul divergență iar intensităților câmpurilor electrice/magnetice li se aplică operatorul rotor, trebuie ca fiecare să îndeplinească condiții de continuitate și netezime specifice. La trecerea prin suprafețele de discontinuitate, inducția trebuie să-și conserve componenta normală iar intensitatea își conservă componenta tangențială. După cum se va vedea ulterior aceste restricții se mențin și în cazul lucrului cu funcții generalizate, fiind deci caracteristici fundamentale ale componentelor câmpului electromagnetic.

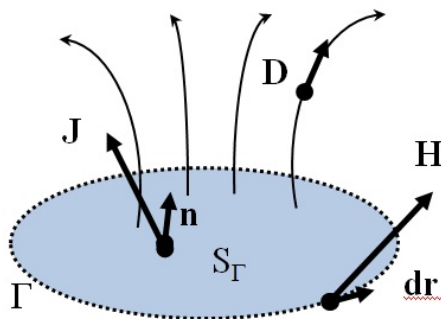


Figura 1.7: Legea circuitului magnetic

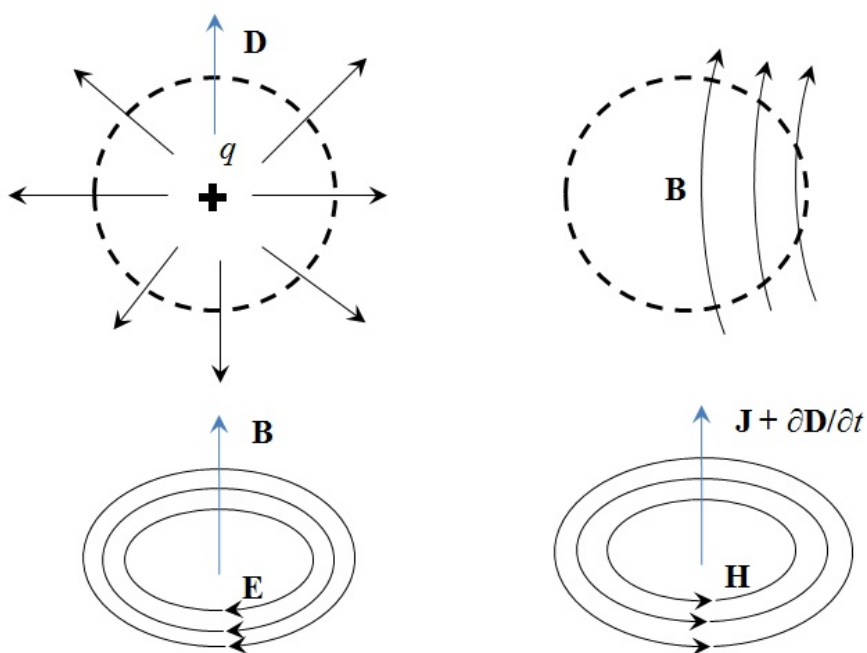


Figura 1.8: Reprezentarea simbolică a legilor generale

1.3 Legile de material

Legile de material, în număr de trei, completează legile generale, specificând existența anumitor relații constitutive între mărimile locale ale câmpului electromagnetic. Spre deosebire de legile generale, ale căror forme generale erau cele globale, în cazul legilor de material se va vedea că formele lor generale sunt formele

locale.

1.3.1 Legea legăturii între $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$

1. **Enunț:** Inducția electrică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

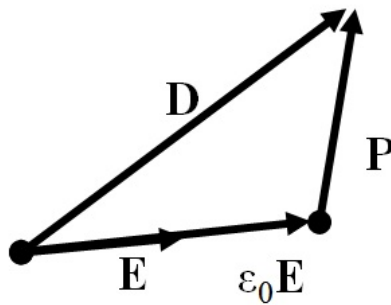


Figura 1.9: Definiția polarizației

2. **Forma generală (locală) a legii:**

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{E}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.38)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale numită *caracteristică dielectrică*, dar în cazul general, în care câmpul variază în timp, f poate fi un operator. Dacă nu are loc variația după $\mathbf{r}$, atunci avem un mediu *dielectric omogen*.

3. **Forme locale particulare:**

(a) În vid:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.39)$$

în care $\varepsilon_0 \cong \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ se numește *permitivitatea vidului* și este o constantă universală. Pentru valoarea exactă vedeți (http://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity). În consecință, inducția și intensitatea câmpului electric sunt coliniare și proporționale, fiind suficientă doar una dintre cele două mărimi vectoriale pentru a caracteriza complet câmpul electric dintr-un punct din vid.

(b) În dielectrici liniari izotropi:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad (1.40)$$

Aceștia sunt caracterizați de constanta de material ε_r , mărime fizică scalară, adimensională, numită *permitivitatea relativă* a mediului. Corpurile omogene au o valoare constantă a permitivității, în schimb în corpurile neomogene permitivitatea depinde de punct. Din punct de vedere matematic aceste corpuri sunt caracterizate de funcția reală de variabilă vectorială: $\varepsilon_r = f(\mathbf{r}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, definită pe domeniul corpului.

În modelarea electromagnetică se întâlnesc două cazuri degenerate: mediul *anelectric*, la care se presupune $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \mathbf{D} = 0$ și *dielectricul perfect*, la care $\varepsilon \rightarrow \infty \Leftrightarrow \mathbf{E} = 0$.

(c) În dielectricii liniari anizotropi:

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E}; \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Aceștia sunt caracterizați de mărimea fizică $\bar{\bar{\varepsilon}}$, numită *tensorul permitivității* (relative/ absolute). Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită. Matricea este diagonalizată, dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În corpurile polarizate permanent se folosește *modelul afin* - aproximație de ordinul unu a funcției (1.38):

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \quad (1.42)$$

obținută prin truncherea seriei Taylor a funcției f doar la primii doi termeni. În realtă (1.42) $\bar{\bar{\varepsilon}}$ este tensorul permitivităților dinamice, definit ca matricea Jacobian a funcției f , iar $\mathbf{P}_p = f(0)$ este o matrice vectorială numită *polarizație permanentă*.

4. Semnificații fizice:

Polarizația $\mathbf{P}$ [C/m²] este o mărime derivată definită de relația (fig. 1.9):

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = f(\mathbf{E}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p \quad (1.43)$$

în care $\mathbf{P}_p = f(0)$ este *polarizația permanentă*, iar $\mathbf{P}_t(\mathbf{E}) = \mathbf{P} - \mathbf{P}_p = f(\mathbf{E}) - f(0)$ este *polarizația temporară*. Aceste mărimi fizice descriu fenomenul de polarizare permanentă - prin care electreții devin sursă de câmp

electric și respectiv fenomenul de polarizare temporară - prin care dielectri-
cii perturbă câmpul în care se află.

În medii liniare:

$$\mathbf{P}_p = 0, \mathbf{P} = \mathbf{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \Rightarrow \varepsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (1.44)$$

În care χ_e - se numește *susceptivitate dielectrică* și caracterizează capaci-
tatea corpului de a se polariza temporar (sub acțiunea câmpului electric).
Mărimea globală asociată polarizației este *momentul electric* definit ca in-
tegrala magnetizației pe volumul corpului:

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{P} dv \quad [\text{Cm}]. \quad (1.45)$$

În practică cel mai des folosit este modelul afin (1.42) și cazurile lui particu-
lare - mai ales modelul liniar și izotrop (1.40) pentru modelarea electreților.
Câmpul electric produs de un electret neîncărcat cu sarcină are liniile in-
ducției $\mathbf{D}$ curbe închise (orientate în interiorul corpului în sensul polariza-
ției sale permanente) și liniile intensității $\mathbf{E}$ curbe deschise, identice cu cele
ale lui $\mathbf{D}$ în exteriorul corpului și opuse (depolarizante) în interior. Corpu-
rile dielectrice liniare introduse în câmp electric perturbă liniile câmpului,
atrăgându-l în interiorul lor, cu atât mai mult cu cât au permeabilitate mai
mare. Inducția $\mathbf{D}$, care are liniile de câmp curbe închise crește în interiorul
corpului, dar scade în exterior. În schimb, intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$,
scade atât în interior, cât și în exterior.

5. Forma globală a legii în câmp uniform:

Fluxul electric ce străbate un corp cilindric omogen de lungime l și aria
bazei A , depinde de tensiunea de-a lungul său astfel:

$$\psi = A \cdot f(u/l). \quad (1.46)$$

În cazul particular al dielectricilor liniari, dependența $\psi - u$ este tot liniară:

$$\psi = A\varepsilon \frac{u}{l} = Cu. \quad (1.47)$$

cu $C = A\varepsilon/l$. O relație asemănătoare este valabilă și în cazul general al
unui tub de flux, sau al unui corp de formă arbitrară cu două borne echi-
potențiale disjuncte. Acesată relație evidențiază o metodă de măsurare a
permeabilității unui mic eșantion cilindric, măsurând mărimile globale u și
 ψ .

6. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permitivitățile ε_1 și ε_2 , linia de câmp a inducției electrice se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , care satisfac relația:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (1.48)$$

Demonstrația acestei relații ce descrie *refracția liniilor de câmp electric* este o consecință imediată a conservării componente normale a inducției și a componente tangențiale a intensității câmpului. În particular, dacă unul din medii este degenerat, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ sau $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața acelui mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. În consecință, liniile de câmp sunt perpendiculare pe dielectricii perfecți și se preling pe la suprafața corpurilor anelectrice.

1.3.2 Legea legăturii între B și H

1. **Enunț:** Inducția magnetică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea magnetică din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

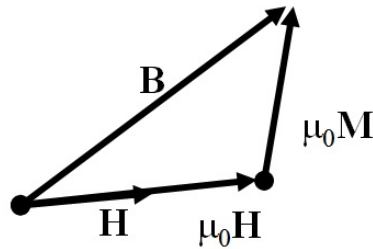


Figura 1.10: Definiția magnetizației

2. **Forma generală (locală) a legii:**

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{H}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.49)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale, numită *caracteristică de magnetizare*, dar în cazul general, în care câmpul variază în

timp, f poate fi un operator, iar în cazul particular al mediilor *omogene*, variabila r nu mai apare.

În cazul mediilor cu histerezis, se stabilește o relație neliniară între modul de variație în timp al intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}$ și modul în care variază în timp inducția $\mathbf{B}$.

3. Forme locale particulare:

(a) În vid (și medii nemagnetice):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.50)$$

în care $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ se numește *permeabilitatea magnetică a vidului* și este o constantă universală. În consecință, inducția și intensitatea câmpului magnetic sunt coliniare și proporționale, fiind suficientă doar una dintre cele două mărimi vectoriale pentru a caracteriza complet câmpul magnetic dintr-un punct din vid.

(b) În medii liniare și izotrope:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \Rightarrow \mu = \mu_0 \mu_r. \quad (1.51)$$

Acestea sunt caracterizate de constanta de material μ_r , mărime fizică scalară, adimensională, numită *permeabilitatea magnetică relativă* a mediului. Corpurile omogene au o valoare constantă a permeabilității, în schimb în corpurile neomogene, permeabilitatea depinde de punct. Din punct de vedere matematic aceste corpuri sunt caracterizate de funcția reală de variabilă $\varepsilon_r = f(\mathbf{r}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, definită pe domeniul corpului.

Cazurile degenerte întâlnite în modelare sunt materialele *amagnetice*, la care $\mu = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = 0$ și mediul *feromagnetic perfect*, la care $\mu \rightarrow \infty \Leftrightarrow \mathbf{H} = 0$.

(c) În medii anizotrope:

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}; \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Aceștea sunt caracterizate de mărimea fizică $\bar{\bar{\mu}}$ numită *tensorul permeabilității* (relative/ absolute). Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită, notată și cu $\bar{\bar{\mu}}$. Matricea este diagonalizată dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În magneți permanenți se folosește *modelul afin*:

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_p \quad (1.53)$$

obținut prin aproximarea caracteristicii neliniare de magnetizare (1.49) cu trunchierea de ordin întâi a seriei Taylor a funcției f .

Tensorul $\bar{\bar{\mu}}$ reprezentat de matricea Jacobian a caracteristicii neliniare de magnetizare este *permeabilitatea dinamică inițială* (în origine) a mediului, iar $\mathbf{I}_p = \mathbf{f}(0) = \mathbf{B}_r$, se numește *polarizația magnetică* sau inducția remanentă. De multe ori în locul lui este preferată mărimea $\mathbf{M}_p = \mathbf{I}_p/\mu_0$ numită *magnetizație permanentă*.

(e) În general:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \mathbf{M} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p, \\ \mathbf{M}_p &= \frac{\mathbf{f}(0)}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

(f) Iar în medii liniare:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) \chi_m \mathbf{H}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + \chi_m. \end{aligned} \quad (1.55)$$

În care χ_m se numește *susceptibilitate magnetică*.

Relația $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ definește o nouă mărime fizică, care descrie fenomenul de magnetizare. Aceasta este $\mathbf{M} = (\mathbf{B}/\mu) - \mathbf{H}$, o mărime fizică vectorială locală, numită *magnetizație*. Cu toate că în definiția ei s-au folosit marimi ale câmpului, rezultatul este totuși o mărime caracteristică corpurilor (Fig. 1.10). Mărimea globală asociată magnetizației este *momentul magnetic*, definită ca integrala magnetizației pe domeniul corpului:

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{M} dv \quad [\text{A}/\text{m}^2]. \quad (1.56)$$

Ea este o mărime vectorială globală și instantanee, care descrie starea globală de magnetizare a unui corp.

4. Semificația fizică:

Legea descrie fenomenele de magnetizare permanentă - sursă de câmp magnetic și magnetizarea temporară, datorită căreia câmpul magnetic este perturbat de prezența corpurilor magnetizabile.

5. Forma globală a legii în camp uniform:

Fluxul magnetic ce străbate un corp cilindric omogen de lungime l și aria bazei A depinde de tensiunea de-a lungul său astfel:

$$\varphi = A \cdot f(t, u_m/l), \quad (1.57)$$

în cazul particular al corpurilor liniare, dependența $\varphi - u_m$ este tot liniară:

$$\varphi = A\mu \frac{u_m}{l} = Lu_m. \quad (1.58)$$

cu $L = A\mu/l$. Acesată relație evidențiază o metodă de determinare experimentală a permeabilității unui mic eșantion cilindric, măsurând mărimile globale u_m și φ .

6. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permeabilitatea μ_1 și μ_2 , linia de câmp a inducției magnetice se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , ce satisfac relația :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.59)$$

Demonstrația este o consecință imediată a conservării componente normale a inducției și a componente tangențiale a intensității câmpului. În particular dacă unul din medii este degenerat, $\mu_1 \rightarrow 0$ sau $\mu_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața aceluia mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. În consecință liniile de câmp sunt perpendiculare pe materialele perfect magnetice și se preling pe la suprafața corpurilor amagnetice.

Dacă adăugăm mărimile derivate $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{p}$ la cele introduse în capitolul (1.1), obținem un sistem de opt mărimi locale și opt mărimi globale, din care jumătate caracteristice câmpului și jumătate caracteristice corpurilor. Din cele 16 mărimi, doar 6 sunt primitive, iar celelalte sunt derivate. În diferite variante ale prezentării teoriei electromagnetismului macroscopic se consideră diverse mărimi din cele 16 ca fiind primitive, rezultatul fiind în cele din urmă același, obținându-se teorii echivalente. În consecință, nu are prea mare relevanță practică, care sunt cele șase mărimi primitive ale electromagnetismului și pe care le considerăm derivate.

1.3.3 Legea conducției

1. **Enunț:** Densitatea de curent dintr-un punct depinde de intensitatea curentului din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

2. Forma generală (locală) a legii:

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.60)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale, dar în cazul general în care câmpul variază în timp, f poate fi un operator.

3. Forme locale particulare:

(a) În vid:

$$\mathbf{J} = 0. \quad (1.61)$$

(b) În conductoare liniare izotrope:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}, \quad (1.62)$$

în care $\sigma \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$ se numește *conductibilitatea electrică*. Mărimea inversă conductivității este *rezistivitatea electrică*, cu simbolul ρ și unitatea de măsură $[\Omega \cdot \text{m}]$. Cazurile degenerate sunt *izolatorul perfect* $\sigma = 0 \Leftrightarrow \mathbf{J} = 0$ și *conductorul perfect*, sau *supraconductorul*: $\rho = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = 0$.

(c) În conductoare liniare anizotrope:

$$\mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}} \mathbf{E}. \quad (1.63)$$

Aceștia sunt caracterizați de mărimea fizică $\bar{\bar{\sigma}}$ numită *tensorul conductivității*. Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită. Matricea este diagonalizată dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În corpuri cu câmp imprimat se folosește modelul afin de dependența între $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \rho \mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \quad (1.64)$$

4. Semnificație fizică:

Legea evidențiază faptul că starea electrocinetică se datorează câmpului electric și că în corpurile cu câmp imprimat (din diferite cauze: termice, mecanice, chimice, cum se întâmplă în cazul bateriilor și acumulatorilor) apare un câmp electric generat de cauze ne-electrice.

5. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permitivitățile σ_1 și σ_2 , linia de câmp se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , ce satisfac relația ::

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (1.65)$$

În particular dacă unul din medii este degenerat, $\sigma_1 \rightarrow 0$ sau $\sigma_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața aceluși mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. Linia de curent cade perpendicular pe conductoarele perfecte și se prelinge pe suprafețele corpurilor izolante.

Cel mai adesea în modelarea electromagnetice se folosește forma liniară a legii conductiei. Un mediu liniar este caracterizat complet din punctul de vedere al parametrilor electromagnetici de material de trei constante de material: permeabilitatea ε , permitivitatea μ și conductivitatea σ .

1.4 Legile de transfer

1.4.1 Legea transferului de energie în conductoare

1. **Enunț:** Densitatea de volum a puterii transferate de câmp conductoarelor în stare electrocinetică este egală cu produsul scalar între intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric de conducție.

2. **Forma locală:**

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (1.66)$$

Mărimea p măsurată în $[\text{W}/\text{m}^3]$ este o mărime fizică scalară, locală și instantanee ce descrie transferul de putere.

3. **Forma globală:**

$$P = \int_{\Omega} p dv = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (1.67)$$

Forma globală a legii dă valoarea puterii P [W] transferată de câmp unui corp întreg, fără să arate cum este distribuită disiparea de energie. Pentru a realiza o modelare precisă, de exemplu a distribuției temperaturii într-un corp conductor parcurs de curent, trebuie folosită forma locală a legii, care este forma generală.

4. **Semnificație fizică:** Această lege descrie efectul caloric al stării electrocinetice. În cazul mediilor conductoare liniare, deoarece densitatea de putere este pozitivă, transferul de putere are loc ireversibil, de la câmp la corp:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \rho J^2 > 0. \quad (1.68)$$

1.4.2 Legea transferului de masă (a electrolizei)

1. **Enunț:** În procesul de conducție are loc un transfer de masă cu densitatea fluxului de masă proporțională și coliniară cu densitatea de curent.
2. **Forma locală**

$$\delta = k\mathbf{J} \quad (1.69)$$

în care k este neglijabil în metale și este egal cu coeficientul electrochimic în electroliți.

$$k = \frac{A}{Fn}, \quad (1.70)$$

A este masa atomică, n este valența elementului depus la electrod și $F = 96485,3365\text{C/mol}$ este numărul lui Faraday.

3. **Forma globală:** Debitul masic depus prin fenomenul de electroliză este în consecință:

$$Q_m = \int_{\Sigma} k\mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (1.71)$$

în care Σ este suprafața anodului, iar masa totală depusă în intervalul (t_1, t_2) este

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k\mathbf{J} d\mathbf{A} dt. \quad (1.72)$$

În particular, dacă $k = ct$. și $\mathbf{J}$ nu depinde de timp:

$$m = kIt, \quad (1.73)$$

în care $t = t_2 - t_1$, iar

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \quad (1.74)$$

este curentul ce străbate cuva electrolitică.

4. **Semnificație fizică:** legea descrie fenomenul de electroliză.

Forma globală a legii indică masa totală depusă prin electroliză dar nu și locul în care este aceasta depusă. Dacă se dorește calculul grosimii stratului depus prin electroliză trebuie aplicată forma locală a legii, care este forma generală.

După cum se constată, legile câmpului electromagnetic nu pun în evidență în mod direct efectele mecanice ale acestui câmp. Ele pot fi totuși determinate folosind teoremele câmpului electromagnetic, ale căror demonstrație se bazează pe legile prezentate.

1.5 Teoremele de conservare

1.5.1 Teorema conservării sarcinii

1. **Enunț:** Curentul electric ce părăsește orice suprafață închisă este egal cu viteza de scădere a sarcinii din domeniul interior suprafeței. Și de această dată se aplică ipoteza lui Hertz, conform căreia, curbele și suprafețele sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor.

2. **Forma globală/integrală:**

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\mathcal{D}_{\Sigma}}}{dt} \Rightarrow \int_{\Sigma=\partial\mathcal{D}_{\Sigma}} \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \rho dv. \quad (1.75)$$

Prima relație este forma globală a legii iar a doua este forma sa integrală.

3. **Forma locală pentru medii imobile:**

$$\nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.76)$$

Se obține din relația (1.75) prin aplicarea relației lui Gauss. În medii mobile:

$$\nabla (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div} (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.77)$$

se ține cont de derivata substanțială.

Vectorul $\mathbf{J}v = \rho \mathbf{v}$ este densitatea curentului de convecție a sarcinii. Dacă notăm cu $\mathbf{J}d = d\mathbf{D}/dt$ densitatea curentului de deplasare, rezultă că suma celor trei curenți: de conducție, de convecție și de deplasare are întotdeauna divergența nulă, fiind deci un câmp solenoidal.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \quad (1.78)$$

În cazul particular în care suprafața nu este electrizată, $\rho_s = 0$:

$$J_{n1} = J_{n2}, \quad (1.79)$$

ceea ce evidențiază conservarea componentei normale a densității de curent la trecerea prin suprafețele de discontinuitate ne-electrizate.

5. Semnificație fizică:

Între curent și sarcina există o foarte strânsă legatură. Sarcina se conservă sau migrează sub forma de curent. Linile de câmp ale densității totale de curent (convecție plus deplasare plus convecție) sunt curbe închise, deci acesta se conservă. În regim staționar, această concluzie este valabilă pentru curentul de conducție, deoarece ceilalți doi curenți sunt oricum nuli.

1.5.2 Teorema energiei electromagnetice

1. **Enunț:** Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu prin frontiera acestuia este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniu plus viteza de creștere a energiei câmpului electromagnetic din domeniu:

$$P_\Sigma = P_{\mathcal{D}_\Sigma} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \quad (1.80)$$

2. Forma locală în medii imobile:

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}. \quad (1.81)$$

este o consecință pătratică a legilor câmpului electromagnetic, în formele lor locale. Mai exact, prima ecuație a lui Maxwell (2.34) amplificată în produs scalar cu $\mathbf{E}$ se adună cu a doua ecuație a lui Maxwell (2.28) amplificată tot în produs scalar cu $-\mathbf{H}$. În consecință, în medii liniare imobile, termenii au expresiile:

- $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ - este vectorul Poynting, măsurat în W/m^2 ;
- $p = \mathbf{E} \mathbf{J}$ - este densitatea de volum a puterii transferată de câmp corpurilor, se măsoară în W/m^3 ;

- $w_{em} = w_e + w_m$ este densitatea de volum a energiei electromagnetice, măsurată în J/m^3 ;
- $w_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2$ este densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3 ;
- $w_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} / 2$ este densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3 .

Forma globală a teoremei rezultă prin integrarea formei locale pe domeniul corpului, deci:

- $P_\Sigma = - \int_{\Sigma=\partial D} \mathbf{S} d\mathbf{A}$ este puterea transferată prin suprafața domeniului, orientată convențional de la exterior spre interior, măsurată în W;
- $P = \int_D p dv = \int_D \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$ este puterea transferată corpurilor din domeniu, măsurată în W;
- $W_{em} = \int_D w_{em} dv = \int_D \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) dv = W_e + W_m$ este energia câmpului electromagnetic din domeniu, măsurată în J.

În cazul **mediilor neliniare**, densitatea de energie electrică și cea magnetică au expresiile:

$$\begin{aligned} w_e &= \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D}' = \int_0^D f^{-1}(\mathbf{D}') d\mathbf{D}'; \\ w_m &= \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B}' = \int_0^B g^{-1}(\mathbf{B}') d\mathbf{B}'. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Dacă **mediile sunt în mișcare**, atunci în energia transferată corpurilor intervine și lucrul mecanic efectuat de acestea ca urmare a deplasării, sub acțiunea forțelor de natură electrică și magnetică. În aceste condiții, în acord cu principiul întâi al termodinamicii:

$$\begin{aligned} - \frac{dW_{em}}{dt} &= P_{mec} + P_{cond} + P_\Sigma \Leftrightarrow P_{mec} = - \frac{dW_{em}}{dt} - P_{cond} - P_\Sigma =_{def} \\ &=_{def} \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv = - \frac{dW_{em}}{dt} - \int_{D_\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV - \oint_\Sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &\int_{D_\Sigma} \left(- \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Big|_{\Psi=ct.} + \frac{E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Big|_{\Psi=ct.} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{\Phi=ct.} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \Big|_{\Phi=ct.} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Identificând termenii, rezultă densitățile volumetrice de forță electrică și magnetică

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m = \rho_V \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} (\text{grad } \varepsilon) + \text{grad} \left(\frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) + \\ + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{H^2}{2} (\text{grad } \mu) + \text{grad} \left(\frac{H^2}{2} \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

Această expresie pune în evidență următoarele forțe cu care câmpul electromagnetic acționează asupra corpurilor liniare: Coulomb (datorată electrizării), datorată polarizației temporare, de electrostricțiune, Laplace (datorată curentului electric), datorată magnetizației temporare și de magnetostricțiune.

Ca o consecință a teoremei energiei electromagnetice în medii neliniare, rezultă și expresiile **forțelor generalizate** de natură electrică și magnetică exercitate asupra unui sistem cu n grade de libertate:

$$\begin{aligned} X_{k\ e} = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{Q=ct.}, \quad X_{k\ m} = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\Phi=ct.} \\ X_{k\ e} = \left. \frac{\partial W_e^*}{\partial x_k} \right|_{U=ct.}, \quad X_{k\ m} = \left. \frac{\partial W_m^*}{\partial x_k} \right|_{I=ct.} \end{aligned} \quad (1.85)$$

în care s-a notat cu X_k forța generalizată (componetă a forței măsurată în N , momentul forței măsurat în Nm sau presiune măsurată în N/m^2) cu care câmpul electromagnetic acționează asupra sistemului, cu x_k s-a notat coordonata generalizată asociată (măsurată în m , radiani respectiv m^3), pentru $k=1,2,\dots,n$. S-a notat cu W_e , W_m energia electrică, respectiv magnetică a sistemului, și cu W^* s-a notat co-energia, adică integrala densității de co-energie, definită astfel:

$$w_e^* = \int_0^E \mathbf{D} d\mathbf{E}'; \quad w_m^* = \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H}'. \quad (1.86)$$

În prima teoremă a forțelor generalizate, se derivează energia totală, în condițiile în care fluxurile magnetice Φ și sarcinile electrice Q nu variază, iar în a doua teoremă a forțelor generalizate, se derivează coenergia, în condițiile în care tensiunile electrice U și curenții I sunt constanți.

1.5.3 Teorema impulsului electromagnetic. Tensorul lui Maxwell

1. **Enunț:** Viteza de variație a impulsului electromagnetic al unui domeniu este egală cu fluxul tensorului tensiunilor lui Maxwell pe frontiera domeniului minus forța totală, cu care câmpul electromagnetic acționează asupra domeniului.
2. Forma globală:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{em}}{\partial t} = \oint_{\Sigma} \mathbf{T}_{em} \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{F}_{em} \quad (1.87)$$

3. Forma locală:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{em}}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{T}_{em}) - \mathbf{f}_{em} \quad (1.88)$$

în care: $\mathbf{g}_{em} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$, măsurat în Ns/m^3 este *densitatea de volum a impulsului electromagnetic*;

$\mathbf{G}_{em} = \int_{D_{\Sigma}} \mathbf{g}_{em} dv = \int_{D_{\Sigma}} \mathbf{D} \times \mathbf{B} dv$ măsurat în Ns este *impulsul electromagnetic total*;

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{em} &= \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_m + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{es} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{ms}; \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e &= \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}^T - w_e \overline{\overline{\mathbf{I}}}; \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_m &= \mathbf{H} \wedge \mathbf{B}^T - w_m \overline{\overline{\mathbf{I}}}, \\ \mathbf{T}_{ms} &= \overline{\overline{\mathbf{I}}} \frac{\mathbf{H}^2}{2} \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}, \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{es} &= \overline{\overline{\mathbf{I}}} \frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (1.89)$$

este *tensorul tensiunilor maxwelliene*, cu o componentă electrică, una magnetică, una de electrostricțiune și a patra de magnetostricțiune. Aici intervine produsul diadic a doi vectori (notat cu $\wedge$) și $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ – tensorul unitar, reprezentat de matricea unitate 3×3 . În final se obțin următoarele componente ale tensorului tensiunilor lui Maxwell:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_e = \begin{bmatrix} E_x D_x - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

cu $\left| \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e \mathbf{n} \right| = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} = w_e$.

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_m = \begin{bmatrix} H_x B_x - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} & H_x B_y & H_x B_z \\ H_y B_x & H_y B_y - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} & H_y B_z \\ H_z B_x & H_z B_y & H_z B_z - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

$$\text{cu } \left| \overline{\overline{\mathbf{T}_e}} \cdot \mathbf{n} \right| = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} = w_m.$$

Iar tensorii de stricțiune sunt diagonali.

În consecință, în regim staționar, forța electromagnetică ce se exercită asupra unui domeniu este egală cu fluxul tensorului tensiunilor maxwelliene pe suprafața acelui domeniu:

$$\mathbf{F}_{em} = \oint_{\Sigma} \overline{\overline{\mathbf{T}_{em}}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.92)$$

În practică, această relație se aplică la viteze mici și în regim variabil, deoarece de obicei, viteza de variație a impulsului electromagnetic este neglijabilă. În cazul unui tub de flux, câmpul electric/ magnetic acționează asupra lui cu o presiune egală cu densitatea de volum a energiei electrice/magnetice. Această presiune tinde să apropie liniile de câmp (comprimă domeniul, transversal pe liniile de câmp) și să le alungească (extinde domeniul de-a lungul liniilor de câmp).

Forma locală a teoremei impulsului electromagnetic este o consecință pătratică a legilor câmpului electromagnetic, în formele lor locale. Mai exact, prima ecuație a lui Maxwell (1.34) amplificată în produs vectorial cu $\mathbf{D}$ se adună cu a doua ecuație a lui Maxwell (1.28) amplificată în produs vectorial cu $-\mathbf{B}$ [88].

Exprimarea forțelor prin intermediul tensorului tensiunilor maxwelliene are importanță practică dar și teoretică. Ea arată că odată calculat câmpul electromagnetic din jurul unui corp, acesta determină forțele electromagnetice totale, asupra sa și că pentru calculul lor nu este necesară cunoașterea câmpului din interiorul corpului. Totuși pentru a determina felul în care se distribuie acțiunile ponderomotoare în interiorul corpului trebuie cunoscută distribuția volumetrică a câmpului electromagnetic CITARE: A. Bossavit [16].

1.6 Sinteză: relații cauzale - fenomene electromagnetice fundamentale

Legile câmpului electromagnetic au următoarea formă locală în medii imobile, cu caracteristici afine de material:

1. $\nabla \mathbf{D} = \rho$
2. $\nabla \mathbf{B} = 0$
3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

1.6. SINTEZĂ: RELAȚII CAUZALE - FENOMENE ELECTROMAGNETICE FUNDAMENTALE 49

$$4. \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$5. \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$$

$$6. \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$$

$$7. \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

$$8. p = \mathbf{E} \mathbf{J}$$

$$9. \delta = k \mathbf{J}$$

$$10. \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Diagrama cauzală este prezentată în (1.11)

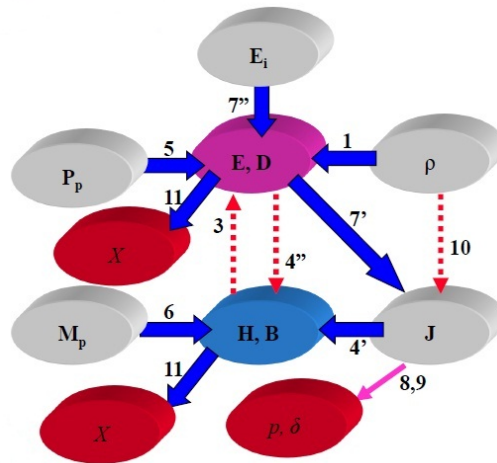


Figura 1.11: Diagrama cauzală

Această diagramă pune în evidență relațiile cauzale, fundamentale ale elector-magnetismului. Sunt marcate cu săgeată continuă relațiile valabile atât în regim staționar cât și în regim variabil. Cu săgeată punctată sunt marcate relațiile cauză-efect, care apar în regim dinamic, doar atunci când cauza este variabilă în timp. Sunt evidențiate cele patru cauze ale câmpului electric, trei generale: electreții, corpurile cu câmpuri imprimate, sarcinile electrice și una cu caracter dinamic: variația în timp a câmpului magnetic. La rândul său câmpul magnetic are două cauze generale: magneții permanenți și curenții electrice, dar și o cauză dinamică, variația în timp a câmpului electric. Curentul electric se datorează câmpului electric din conductoare, dar el apare și datorită variației în timp a sarcinii electrice. Transferul de energie, generarea de căldură și transferul de masă sunt toate datorate curentului electric, în schimb acțiunile mecanice apar datorită interacțiunii cu substanța, atât a câmpului electric cât și a celui magnetic.

1.7 Regimurile câmpului electromagnetic

Deoarece rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell în forma lor completă este dificilă, în modelarea electromagnetică se folosesc de cele mai multe ori regimurile câmpului electromagnetic, care sunt stări particulare ale acestui câmp, în care anumite fenomene dispar sau sunt neglijabile. Fiecare regim este definit de ipotezele sale simplificatoare, iar ecuațiile sale fundamentale se obțin din legile câmpului electromagnetic ca o consecință a acestor ipoteze, care în primul rând la modul în care variază câmpul în timp.

Dacă nu au loc variații în timp ale mărimilor fizice, atunci avem *regimuri staționare*, iar dacă în plus nu au loc transformări de energie (deci curenții sunt nuli), atunci obținem regimurile *statice*. Din Fig. (1.11) și 1.12 este evident că în regimurile statice, digrama cauzală se sparge în două părți disjuncte, una referitoare la câmpul electric (*ElectroStatica ES*) și cealaltă la cel magnetic (*MagnetoStatica MS*). În consecință, câmpurile electrostatic și magnetostatic pot coexista fără să se influențeze reciproc. În regimurile staționare din diagrama de cauzalitate reprezentată în fig. (1.11) dispar relațiile ciclice, ceea ce înseamnă că distribuția câmpului electric și a curentului determină distribuția câmpului magnetic, dar aceasta nu o influențează pe prima.

Deosebim în consecință, două regimuri staționare: *electrocinetica* - *EC*, are ca obiectiv studiul distribuției de curent și *regimul magnetic staționar MG*, care studiază distribuția câmpului magnetic produsă de o distribuție cunoscută de curent. În cazul variației în timp, relațiile fundamentale ale electromagnetismului se pot simplifica doar, dacă neglijăm curentul de deplasare sau fenomenul de inducție electromagnetică. Aceste ipoteze se pot adopta în corpurile bune, respectiv slab conductoare la viteze relativ mici de variație în timp a câmpului. Spunem că ne aflăm în regimuri cvasistaționare, primul este numit inductiv (sau *magneto-qvasi-staționar MQS*) iar al doilea este capacitiv (sau *electro-qvasi-staționar EQS*). Dacă nu avem alte ipoteze simplificatoare, decât caracterul imobil al corpurilor, atunci ne aflăm în *regimul genereal variabil*, sau *electrodinamic ED* al câmpului. Dacă mediile sunt izolante, atunci regimul este *electrodinamic fara pierderi-EDFP* numit *armonic*. În cazul în care mărimile variază sinusoidal în timp, cu aceeași frecvență, avem un regim al câmpului electromagnetic. Acest regim se simbolizează cu *AC*, spre al deosebi de regimul *tranzitoriu TR*, în care mărimile au o variație arbitrară în timp. Avem deci următoarele regimuri dinamice: *EQS*, *ED*, care pot fi *AC* sau *TR*.

Modelarea electromagnetică nu este o reflectare perfectă a realității, ci una aproximativă, care se dorește a fi bineînțeles cât mai fidelă dar, în limite rezonabile. De exemplu, ecuațiile regimurilor statice și staționare, se aplică nu numai la modelarea dispozitivelor în regim staționar ci și în cazul funcționării în regim variabil sau cu piese în mișcare, cu condiția ca vitezele de variație să fie suficient de mici,

pentru ca efectele dinamice să poată fi neglijate. Astfel de exemple sunt circuitele electrice cu parametri R , L , C concentrați, ale căror parametri se determină folosind ecuațiile regimurilor electrocinetic, magneto-staționar și respectiv electrostatic. Această tehnică se folosește cu succes de multă vreme pentru circuite care funcționează nu numai la 50Hz ci și în plaja MHz și chiar GHz.

1.7.1 Regimul electrostatic (ES)

Ipotezele definiției ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie, deci vom presupune densitatea de curent nulă;
- interesează distribuția câmpului electric, care nefiind influențată de câmpul magnetic vom presupune că acesta din urmă este nul.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. 1.12.

Ecuațiile de ordinul întâi ale electrostaticii

se obțin prin particularizarea legilor, conform ipotezelor regimului.

1. Teorema potențialului electrostatic:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.93)$$

se obține din legea inducției electromagnetice.

2. Teorema lui Gauss:

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.94)$$

se obține din legea fluxului electric.

3. Ecuația constitutivă pentru dielectrici:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p. \quad (1.95)$$

este o consecință a legii conducției.

Ecuatiile pun în evidență sursele interne de câmp: ρ , $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$.

Cele două câmpuri $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale și algebrice, liniare, dacă dielectricii sunt liniari și ecuații neliniare, în caz contrar.

În regimul ES intervine o singură constantă de material - permitivitatea ε , iar câmpul este descris de vectorii $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, în timp ce sursele interne de câmp sunt caracterizate de marimile ρ , $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$. Mărimile ce caracterizează sursele externe vor fi identificate ulterior, dar ele trebuie să fie referitoare la componentele câmpului (D_n , E_t), care se conservă la trecerea prin suprafața de frontieră.

Ecuatiile de ordinul doi

Caracterul irotațional al câmpului electric permite exprimarea acestuia cu ajutorul mărimii auxiliare denumită **potențialul electric scalar** $V(\mathbf{r})$, prin relația:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (1.96)$$

Din relația (1.96) rezultă că potențialul electrostatic scalar este definit până la o constantă aditivă. Alegând valoarea potențialului într-un punct (de exemplu nulă, în punctul ales convențional și numit "de masă"), această constantă este fixată. Deoarece tensiunea între două puncte este potențialul inițial minus cel final (în ES valoarea tensiunii nu depinde de forma curbei), rezultă că potențialul unui punct este tensiunea de la acel punct la punctul de referință, în care potențialul este convențional nul:

$$u_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = V_A - V_B \Rightarrow V(P) = \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.97)$$

Folosirea potențialului electrostatic este evident avantajoasă, pentru faptul că în loc de a folosi două câmpuri vectoriale $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$, câmpul electrostatic este descris complet doar cu un câmp scalar V definit pe Ω . În plus, tensiunea electrică se calculează mult mai ușor, prin diferența de potențial.

Ținând seama de ecuația constitutivă $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$, rezultă:

$$\nabla(\varepsilon \nabla V) = -\rho + \nabla \mathbf{P}_p. \quad (1.98)$$

Această ecuație de ordinul al doilea, satisfăcută de potențial pune în evidență sursele locale ale câmpului electrostatic, interioare domeniului de calcul: densitatea de sarcină ρ (care poate lua forma densității de volum a sarcinii ρ_v sau cea a densității superficiale de sarcină ρ_s de pe suprafețele de discontinuitate, dacă operăm cu funcții generalizate) și polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$. Se constată că din punct de vedere al potențialului, polarizarea permanentă este echivalentă cu o distribuție

fictivă de sarcină $\rho_p = -\nabla(\mathbf{P}_p)$, numită *sarcină de polarizare*.

La trecerea prin suprafețele de discontinuitate, potențialul îndeplinește condițiile:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \Rightarrow V_1 = V_2. \quad (1.99)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{dV_1}{dn} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dn} = \rho_s. \quad (1.100)$$

Dacă suprafața este ne-electrizată:

$$\rho_s = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{dV_1}{dn} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dn}. \quad (1.101)$$

Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate. Pot exista totuși situații speciale în modelare, în care potențialul are un salt la trecerea de pe o parte pe alta a suprafeței de discontinuitate. Spunem că avem un *dublu strat de potențial*, lucru care se întâmplă, atunci când pe suprafață este concentrat un câmp electric imprimat cu distribuție Dirac. Câmpul electric este local nemărginit, dar integrala sa pe un segment de curbă ce traversează suprafața este egal cu saltul de potențial. Această abordare este utilă în modelarea fenomenelor electrochimice de difuzie, care au loc la interfața dintre electrozi și electroliti, și care explică potențialul de electrod.

În baza condiției de echilibru electrostatic corpurile conductoare liniare sunt echi-potențiale, iar cele cu câmp imprimat au o variație a potențialului, care rezultă prin integrarea câmpului imprimat.

Formal condiția de echilibru electrostatic se obține, considerând conductoarele dielectrice perfecți:

$$\varepsilon \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = 0. \quad (1.102)$$

În concluzie, rezultă că în regim electrostatic, potențialul scalar satisface o ecuație cu derivate parțiale de ordiul doi, de tip eliptic, care în medii omogene devine ecuație Poisson:

$$\Delta V = -\frac{(\rho + \rho_p)}{\varepsilon}, \quad (1.103)$$

iar în cazul absenței surselor interne de câmp, devine ecuația lui Laplace: $\Delta V = 0$, potențialul scalar având în acest caz particular o variație spațială armonică.

După cum se va vedea ulterior, pentru determinarea potențialului mai trebuie adăugate la ecuația (1.103) condiția ei de frontieră, care din punct de vedere fizic descrie sursele externe de câmp.

Deoarece pe frontieră se conservă componenta normală a inducției și cea tangențială a intensității câmpului electric, condițiile de frontieră trebuie să fie corelate cu aceste componente ale câmpului. Dacă la frontieră se află un domeniu conductor, atunci $\mathbf{E}_t = 0$, $\mathbf{D}_n = \rho_s$, ceea ce corespunde condiției $V = ct.$, iar dacă frontiera este anelectrică, atunci $\mathbf{D}_n = 0$. Din punct de vedere fizic, oricare dintre acestea pot fi condiții de frontieră admisibile, dar este evident că ele descriu două situații complet diferite.

Identificarea condițiilor de frontieră pentru formularea corectă a problemei de câmp din fiecare regim va fi subiectul capitolului dedicat modelării matematice.

În modelarea dispozitivelor electrostatice intervine de regulă un număr finit de subdomenii omogene, fiecare având propria sa permitivitate. În consecință funcția ε definită pe Ω este constantă pe porțiuni. În interiorul fiecărui subdomeniu potențialul electric satisface de fapt ecuația Poisson. Soluția problemei trebuie să satisfacă cele două condiții de trecere pentru potențial pe toate interfețele între subdomenii.

Dacă dispozitivul conține și părți conductoare, atunci în acestea, câmpul este cunoscut $\mathbf{E} = 0$, deci ele se elimină din domeniul de calcul, dar condițiile de pe frontiera lor trebuie să reflecte contribuția lor la câmpul din domeniul de calcul. Un corp conductor poate fi încărcat fie la potențial cunoscut de o sursă exterioară sau poate avea o sarcină cunoscută.

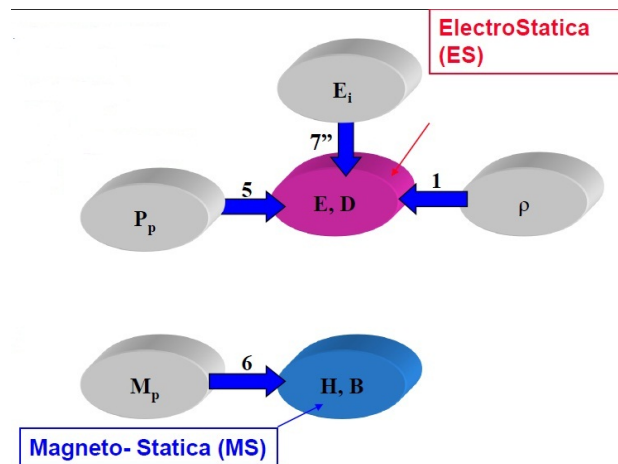


Figura 1.12: Diagrama pentru regimurile statice

1.7.2 Regimul magnetostatic (MS)

Ipotezele definitorii ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie, deci vom presupune densitatea de curent nulă;
- interesează distribuția câmpului magnetic, care nefiind influențată de câmpul electric vom presupune că acesta din urmă este nul.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. (1.12).

Ecuatiile de ordinul întâi ale magnetostaticii

se obțin prin particularizarea legilor, conform ipotezelor regimului.

1. Teorema potențialului magnetic scalar:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (1.104)$$

se obține din legea circuitului magnetic.

2. Teorema fluxului magnetic:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.105)$$

se obține din legea fluxului magnetic.

3. Ecuația constitutivă:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p. \quad (1.106)$$

este consecință a legii de material referitoare la $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

Ecuatiile pun în evidență sursa internă de câmp: $\mathbf{M}_p$.

Cele două câmpuri $\mathbf{H}$ și $\mathbf{B}$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale și algebrice, liniare, dacă materialele sunt liniare și ecuații neliniare, în caz contrar.

În regimul MS intervine o singură constantă de material - permeabilitatea μ , iar câmpul este descris de vectorii $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, în timp ce sursa internă de câmp este caracterizată de mărimea $\mathbf{M}_p$. Mărimile ce caracterizează sursele externe vor fi identificate ulterior, dar ele trebuie să fie referitoare la componentele câmpului (B_n , H_t), care se conservă la trecerea prin suprafața de frontieră.

Ecuatiile de ordinul doi

Caracterul irotațional al acestui câmp magnetic permite exprimarea acestuia cu ajutorul mărimii auxiliare denumită **potențialul magnetic scalar** $V_m(\mathbf{r})$, prin relația:

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m. \quad (1.107)$$

Din relația (1.107) rezultă că potențialul magnetic scalar este definit până la o constantă aditivă.

Ținând seama de ecuația constitutivă $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{B}_r$ în care $\mathbf{B}_r = \mu_0\mathbf{M}_p$, rezultă ecuația satisfăcută de potențial:

$$\nabla(\mu\nabla V_m) = \nabla\mathbf{B}_r. \quad (1.108)$$

Între ecuațiile ES și MS există o similitudine evidentă. Singura deosebire constă în faptul că în MS nu există sarcini adevărate, ci numai sarcini de polarizație (magnetizație). Densitatea sarcinii de polarizație are expresia $\rho_p = \nabla\mathbf{B}_r$. Dacă de exemplu, mediul este omogen atunci $\mathbf{B}_r = c\mathbf{t} \Rightarrow \rho_p = \nabla\mathbf{B}_r = 0$. Dacă acest lucru este valabil numai în interiorul subdomeniului respectiv, deoarece pe frontieră apare o distribuție superficială de sarcină nenulă $\rho_{p,s} = \text{div}_s\mathbf{B}_r = \mathbf{n}\mathbf{B}_r$. În consecință, afirmațiile făcute la regimul electrostatic se transpun cu modificări de notații în regimul magnetostatic, inclusiv cele referitoare la relațiile de interfață satisfăcute de potențial, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate.

1.7.3 Regimul electrocinetic staționar (EC)

Ipotezele simplificatoare ale regimului:

- Corpurile sunt imobile;
- Mărimile sunt constante în timp;
- Nu interesează distribuția câmpului magnetic, ci doar cea a curentului electric.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în Fig. 1.13.

Ecuatiile de ordinul întâi

1. Teorema potențialului electrocinetic:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (1.109)$$

2. Teorema conservării curentului:

$$\nabla \mathbf{J} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (1.110)$$

3. Relația constitutivă:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (1.111)$$

care, în particular se poate scrie:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (1.112)$$

Aceste trei ecuații sunt forme particulare ale legii conservării sarcinii electrice, legea inducției electromagnetice și respectiv legea conducției electrice.

Considerând $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, rezultă că $\exists V$ scalar a. î. $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Ecuațiile de ordinul al doilea

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{J} = \sigma(-\nabla V + \mathbf{E}_i) \\ \nabla \mathbf{J} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla(\sigma \nabla V) = \nabla(\sigma \mathbf{E}_i) \quad (1.113)$$

Ultima expresie din (1.113) este ecuația Poisson generalizată.

Cazuri particulare

- Mediu izotrop, liniar și cu $\mathbf{E}_i = 0$, potențialul satisface ecuația Laplace generalizată:

$$\nabla(\sigma \nabla V) = 0. \quad (1.114)$$

- Mediu omogen, izotrop, liniar și cu $\mathbf{E}_i = 0$, potențialul satisface ecuația Laplace clasică:

$$\Delta V = 0. \quad (1.115)$$

- Mediu omogen, izotrop, liniar, potențialul satisface ecuația Poisson clasică

$$\Delta V = \nabla \mathbf{E}_i. \quad (1.116)$$

Constatăm și de această dată o similitudine a ecuațiilor electrocineticii cu ecuațiile celorlalte regimuri, statice și staționare. În consecință, analiza și concluziile din cazul electrosatisticii se transferă și la celelalte regimuri folosind Tabelul 1.2 de similitudine:

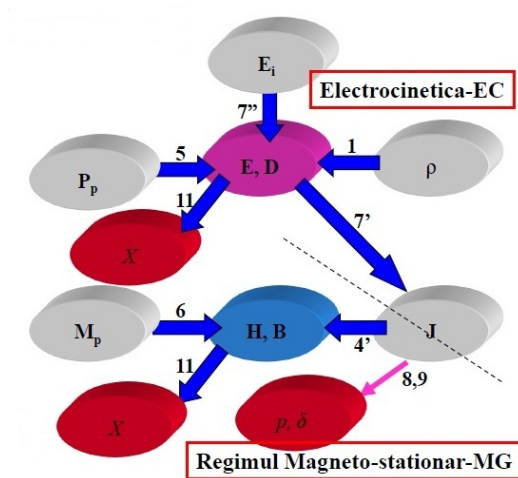


Figura 1.13: Diagrama regimurilor staționare

Regim:	ES	MS	EC
Câmpul	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{E}$
Inducția	$\mathbf{D}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{J}$
Sursa remanentă	$\mathbf{P}_p$	$\mathbf{B}_r$	$\mathbf{J}_i$
Potențialul	V	V_m	V
Sarcina	q	0	$\text{div} \mathbf{J}_i$
Sarcina de polarizație	ρ_p	ρ_m	ρ_p
Fluxul	ψ	φ	i

Tabela 1.2: Similitudinea între regimurile statice și staționare

1.7.4 Regimul magnetic staționar (MG)

Ipotezele simplificatoare ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile nu variază în timp;
- interesează distribuția câmpului magnetic, generat de o distribuție de curent.

Pentru a determina câmpul magnetic se rezolvă anterior o problemă de electrocinetică. Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. 1.12.

Ecuatiile de ordinul întâi

1. Teorema lui Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (1.117)$$

2. Teorema fluxului magnetic:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.118)$$

3. Ecuația constitutivă:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p. \quad (1.119)$$

Ecuatiile de ordinul al doilea

Datorita caracterului solenoidal al inducției magnetice, ecuația (1.119) permite definirea unei mărimi auxiliare $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, denumită *potențial magnetic vector*, astfel încât:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.120)$$

Pentru ca vectorul $\mathbf{A}$ să fie complet definit, se impune condiția de etalonare Coulomb:

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \quad (1.121)$$

Chiar și așa, potențialul magnetic vector nu este unic. De exemplu, dacă se adaugă gradientul unei funcții armonice arbitrare λ , inducția rămâne aceeași:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \lambda); \\ \nabla \mathbf{A} &= \nabla (\mathbf{A} + \nabla \lambda) = \Delta \lambda = 0. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Constatăm deci că spațiul nul (nucleul) operatorului *rot* este mult mai amplu decât nucleul operatorului *grad*. Chiar dacă avantajele nu sunt atât de evidente, ca în cazul potențialului scalar, totuși cel puțin fluxul magnetic se calculează mai simplu, printr-o integrală simplă și nu dublă:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{\Gamma=\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{r}, \quad (1.123)$$

dar acesta nu este singurul avantaj.

Ecuația de ordinul doi satisfăcută de potențialul magnetic vector:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r &\Rightarrow \mathbf{H} = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)}{\mu} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} &\Rightarrow \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \nabla \times \nu \mathbf{B}_r. \end{aligned} \quad (1.124)$$

în care s-a notat cu $\nu = 1/\mu$.

Se constată că din punctul de vedere al potențialului vector, magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r/\mu_0$ este echivalentă cu o distribuție fictivă de curent:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times (\nu \mathbf{B}_r) = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}_p}{\mu_r} \right), \quad (1.125)$$

numit *curent amperian* (de magnetizație).

Ecuția de ordinul doi este în acest caz o ecuație vectorială cu operator de tip *rot-rot*. Regimul magnetostatic este un caz particular, al regimului magnetostaționar, obținut considerând $\mathbf{J} = 0$. Ecuția potențialului vector în acest caz este:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_m. \quad (1.126)$$

Această abordare corespunde modelului Amperian al magnetosatației. Dar deoarece magnetostatica este similară electrocineticii, rezultă că și în acest ultim caz se poate opera cu potențialul vector, notat acum cu $\mathbf{T}$. Ecuția satisfăcută de *potențialul vector al densității de curent* este:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T} &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \times (\rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_i) &= \nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{T}) - \nabla \times \mathbf{E}_i = 0. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Rezolvarea unei probleme prin doua metode, folosind și potențialul scalar și pe cel vector, se numește *abordare complementară* și are avantajul că permite estimarea erorii numerice [18].

Similitudinile între regimurile care folosesc potențialul vector este descrisă în Tabelul 1.2.

Lucrurile se simplifică substanțial în **cazul 2D**. Dacă de exemplu, avem o distribuție de curent plan paralelă, orientată de-a lungul axei Oz , atunci $\mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y)$, iar potențialul vector $\mathbf{A} = \mathbf{k}A(x, y)$ are o singură componentă, care satisface ecuația:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y) = \text{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right),$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (1.128)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow H_x = \nu \frac{\partial A}{\partial y}, H_y = -\nu \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\nabla (\nu \nabla \mathbf{A}) = -\mathbf{J} \Rightarrow -\text{div} [\nu \text{grad } A] = J.$$

care este chiar ecuația scalară Poisson generalizată, perfect similară cu cea satisfăcută de potențialul electrostatic scalar (1.98).

Comportarea **potențialului magnetic vector la trecerea prin suprafețele de discontinuitate**: $\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}$, pentru că altfel, suprafața ar fi pânză de flux. În plus,

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_{n1} = \mathbf{A}_{n2}. \quad (1.129)$$

În consecință, potențialul vector $\mathbf{A}$ este o funcție continuă în tot domeniul (își conservă atât componentele tangențiale cât și cele normale la trecerea prin suprafețele de discontinuitate). În plus

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2, \quad (1.130)$$

condiție îndeplinită dacă $\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}$ și

$$\begin{aligned} \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A} - \nu \mathbf{B}_r) = \mathbf{J}_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu_1 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}_1) = \nu_2 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}_2), \end{aligned} \quad (1.131)$$

pentru suprafețe neparcurse de curenți superficiali, de conducție sau Amperieni, pe care $\mathbf{J}_s = 0$.

Trebuie remarcat că aceste trei condiții de interfață sunt automat îndeplinite, atunci când se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului. Astfel de câmpuri vectoriale, au divergența nulă, atunci au și divergența superficială nulă, iar dacă rotorul este nul, atunci și rotorul superficial este tot nul.

Condițiile de frontieră se vor referi la $\mathbf{B}_n$ sau $\mathbf{H}_t$, deci respectiv la $\mathbf{A}_t$ sau la

$$\nu \mathbf{B}_t = \nu (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \times \mathbf{n}. \quad (1.132)$$

Dacă pe frontieră se află un material feromagnetic ideal,

$$\mathbf{H}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (1.133)$$

iar dacă avem un material amagnetic,

$$\mathbf{B}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (1.134)$$

condiție îndeplinită dacă $\mathbf{A}_t = 0$.

În concluzie, putem afirma că ecuațiile acestui regim sunt mai complicate decât ecuațiile celorlalte regimuri staționare. Explicația principală constă nu numai în caracterul tridimensional - vectorial al lor, ci mai ales în amploarea nucleului operatorului *rot rot*, spațiu care trebuie identificat corect și anulat prin adoptarea unor condiții corecte de frontieră.

1.7.5 Regimul cvasistaționar capacitiv (sau amagnetic - EQS)

În regim cvasistaționar câmpul electromagnetic este variabil în timp, dar suficient de lent pentru ca unele fenomene să poată fi neglijate. În acest caz neglijăm fenomenul de inducție electromagnetică.

Ipotezele simplificatoare

- corpurile sunt imobile;
- variația în timp a mărimilor este suficient de lentă pentru ca fenomenul de inducție electromagnetică să aibă efecte, deci îl neglijăm.

Deoarece dacă presupunem corpurile amagnetice ($\mu = 0$), atunci inducția magnetică se anulează și implicit se anulează și inducția electromagnetică. Această presupunere este deci una din ipotezele regimului.

Fenomene fundamentale și relațiile cauzele specifice acestui regim sunt reprezentate grafic în diagrama din Fig. 1.14.

Ecuatiile fundamentale (de ordinul întâi)

ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \text{ în particular } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p. \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}), \text{ în particular } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \end{array} \right. \quad (1.135)$$

obținute din legea fluxului electric, teorema conservării sarcinii electrice, legea inducției, legea circuitului magnetic, legile de material, particularizate în ipoteza $B = 0$. Aplicând primei ecuații Maxwell operatorul divergență și ținând cont de teorema lui Gauss, rezultă a doua relație de ordinul întâi, care descrie conservarea sarcinii. De obicei se elimină din sistemul ecuațiilor fundamentale a patra relație, cea referitoare la legea circuitului magnetic, astfel încât din ecuații dispar toate mărimile caracteristice câmpului magnetic. În aceste condiții, relația care descrie conservarea sarcinii electrice devine independentă.

Problema fundamentală a acestui regim constă în determinarea modului în care difuzează câmpul electric $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dar și densitatea de sarcină și cea de curent $\mathbf{J}$ în domeniile slab conductoare de formă cunoscută cu proprietăți dielectrice și de conducție cunoscute, în condiții inițiale și de frontieră date. Aceste condiții reprezintă în mod uzual sursa câmpului electromagnetic în acest regim. Dintre efectele specifice acestui regim menționăm: difuzia sarcinilor, spre deosebire de cazul regimului cvasistaționar inductiv, în care sarcinile se redistribuie practic instantaneu, în regimul capacitiv este necesar un timp pentru ca acesta să se relaxeze.

Regimul cvasistaționar capacitiv este utilizat în studiul comportării izolanților în câmp variabil, ca de exemplu dielectricii condensatoarelor. În acest regim, la fel ca în cel electrostatic, câmpul este irotațional și admite deci un potențial scalar. Deosebirea constă în faptul că potențialul variază nu numai în funcție de vectorul de poziție $\mathbf{r}$, ci și de timpul t .

În ecuațiile regimului EQS intervin două constante de material: permitivitatea ε și conductanța σ . Asta indică faptul că sunt modelate efecte capacitive ca în electrostatică dar și cele rezistive, ca în electrocinetică. Spre deosebire de regimurile staționare, în care efectele C și R erau independente, acum cele două efecte CR sunt distribuite și se influențează reciproc.

Ecuția de ordinul al doilea

Se obține exprimând câmpurile din ecuațiile de ordin unu în funcție de potențialul scalar V :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla D}{\partial t} &\Rightarrow \nabla (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i) + \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \left(\sigma \nabla V + \frac{\partial (\varepsilon \nabla V)}{\partial t} \right) &= \nabla \left(\mathbf{J}_i + \frac{\partial \mathbf{P}_p}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.136)$$

Ecuția EQS de ordin doi, este o ecuație de tip parabolic, care combină ecuațiile

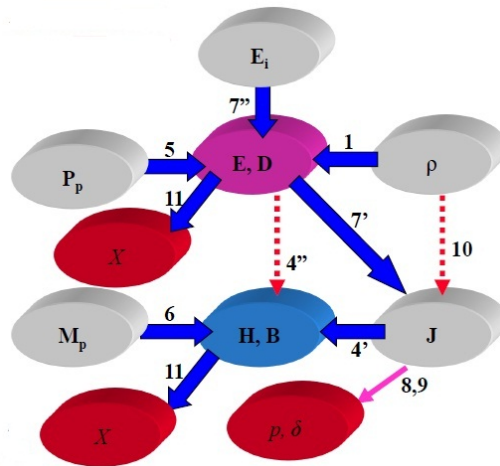


Figura 1.14: Diagrama regimului electro-cvasistaționar - EQS

electrostaticii cu cele ale electrocineticii. Pe parcursul regimului tranzitoriu, la început comportarea electrostatică este preponderentă, iar la sfârșit, cea electrocinetică devine preponderentă.

Pe suprafețele de discontinuitate, potențialul scalar satisface condiții de trecere similare cu cele din electrostatică și electrocinetică. Potențialul este continuu, dar derivata sa după normală are saltul dat de expresia:

$$\nabla_s \left(\sigma \frac{dV}{dn} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{dV}{dn} \right) \right) = 0. \quad (1.137)$$

De această dată, ecuația cu derivate parțiale satisfăcută de potențialul scalar este o ecuație parabolică, a cărei soluție $V(\mathbf{r}, t)$ este definită pe domeniul Ω al problemei și pe intervalul de timp (t_{min}, t_{max}) . Problemele de regim variabil nu au numai condiții de frontieră ci și condiții inițiale. Mai exact, trebuie cunoscută distribuția potențialului electric la momentul inițial, în tot domeniul problemei.

1.7.6 Regimul cvasistaționar de tip inductiv (sau anelectric - MQS)

Ipotezele simplificatoare

Pentru acest regim se consideră următoarele ipotezele simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- variația în timp a mărimilor este suficient de lentă pentru ca efectul magnetic al curenților de deplasare să fie neglijabil, față de cel al curenților de conducție, deci vom presupune că nu există curent de deplasare.

Deoarece dacă presupunem corpurile anelectrice ($\varepsilon = 0$), atunci se anulează inducția electrică și implicit și curenții de deplasare. Caracterul anelectric al corpurilor este deci una din ipotezele regimului.

Fenomenele fundamentale și relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate grafic în diagrama din Fig. 1.15.

Curenții de deplasare sunt neglijăți față de cei de conducție, lucru ce poate fi făcut până la frecvențe foarte mari, deoarece

$$J_d = \omega D = \omega \varepsilon E \ll J = \sigma E \Rightarrow \omega \ll \sigma / \varepsilon.$$

Ecuatiile fundamentale (de ordinul întâi)

Ecuatiile fundamentale ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad \text{în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r. \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad \text{în particular } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \end{array} \right. \quad (1.138)$$

Ele sunt de fapt ecuațiile regimului magnetostatic combinate cu ecuațiile regimului electrocinetic, în care este considerată și inducția electromagnetică, ceea ce face ca intensitatea câmpului electric să-și piardă caracterul irotațional.

Exemple de aplicații în care este necesară analiza câmpului electromagnetic în regim cvasistatic inductiv sunt: încălzire prin curenți turbionari, aparate de măsură bazate pe curenți turbionari cum sunt contoarele de inducție, mașini electrice bazate pe inducție cum sunt transformatoarele, motoarele asincrone și frânele electromagnetice, etc. De această dată materialele sunt caracterizate de două constante: μ și σ , ceea ce indică faptul că regimul modelează fenomenele magnetice și cele de conducție distribuite.

Ecuatiile de ordinul al doilea

Deoarece inducția magnetică este solenoidală, ea admite un potențial vector $\mathbf{A}$. $\mathbf{E}$ nu este irotațional, dar împreună cu $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ se obține un câmp irotațional, care admite un potențial scalar, notat cu V și numit *potențialul electric*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} \text{ a.î. } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \quad (1.139)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V.$$

Mai avem că:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \\ \mathbf{H} = \mu^{-1} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_p) \end{array} \right. \Rightarrow \nabla \times (\mu^{-1} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_p)) = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (1.140)$$

Această relație arată că în regim MQS, dacă am ști distribuția curentului $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, atunci câmpul magnetic se distribuie exact ca în regimul magnetostatic

MG. Dar în MQS, distribuția de curent nu este o dată a problemei, ci ea rezultă în urma rezolvării problemei, fiind afecată de efecte cum sunt cel pelicular, de aglomerare sau de curenți turbionari.

În final dacă notăm $\nu = 1/\mu$, ecuațiile de ordinul al doilea sunt de forma:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J}_i = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) + \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right). \quad (1.141)$$

În zonele neconductive ($\sigma = 0$), ecuațiile degenerază în ecuațiile MG.

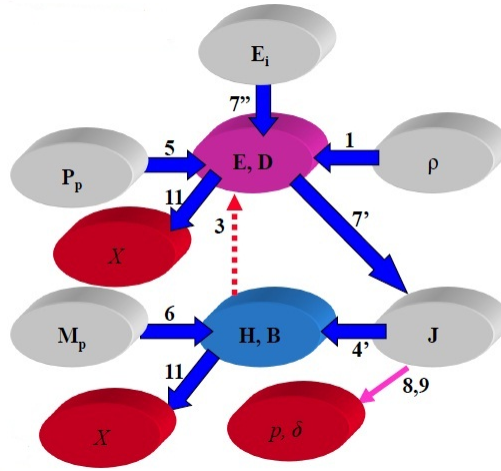


Figura 1.15: Diagrama regimului magneto-cvasistaționar - MQS

Dupa cum s-a arătat în regimul MG, potențialul vector $\mathbf{A}$ este continuu în întreg domeniul de calcul, iar așa cum s-a văzut în regimul EC, potențialul electric scalar V este continuu. În schimb, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate, potențialele pot avea discontinuități ale derivatelor, și trebuie să îndeplinească anumite condiții de interfață:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} &\Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2, \Leftrightarrow \mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \\ \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{pentru } \mathbf{J}_s = 0 : \mathbf{n} \times \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \times \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2 \end{aligned} \quad (1.142)$$

Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului.

Și de această dată, condițiile de frontieră se aleg dintre componentele care se conservă la trecerea prin suprafețele de discontinuitate: $\mathbf{H}_t = (\mathbf{n} \times \nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ sau B_n echivalent cu cunoașterea componentei tangențiale $\mathbf{A}_t$ a potențialului magnetic vector. Cel mai adesea aceasta este nulă. Se va vedea ulterior că pentru a

asigura unicitatea soluției $\mathbf{A}$, mai trebuie adăugate condiții de frontieră suplimentare.

Ecuatiile sunt vectorile de tip parabolic, cu un operator de derivare spațială de ordinul doi de tip *rot-rot*. De data aceasta constantele de material care intervin sunt μ și σ , ceea ce indică faptul că în acest regim sunt modelate efectele inductiv-rezistive distribuite. Pentru caracterizarea câmpului se folosesc: potențialul magnetic vector, dar și potențialul electric scalar, ambele funcții de poziție și timp. Deoarece

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.143)$$

rezultă că $\mathbf{J}$ este solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.144)$$

și în consecință

$$\nabla (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \mathbf{J}_i \Rightarrow -\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla \left(\sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{J}_i \right), \quad (1.145)$$

care în medii omogene devine: $\nabla V = 0$, deoarece conform condiției de etalonare Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Condițiile de interfață ale potențialului scalar sunt cele din electrocinetică.

În zonele neconductoare ($\sigma = 0$), ecuațiile degenerază în ecuațiile MG și nu mai este necesară utilizarea aici a potențialului scalar.

După cum s-a arătat în regimul MG, potențialul vector $\mathbf{A}$ este continuu în întreg domeniul de calcul. În schimb, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate pot să apară discontinuități ale derivatelor, și trebuie ca el să îndeplinească anumite condiții de interfață:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} &\Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2 \Leftarrow \mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \\ \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \end{aligned} \quad (1.146)$$

de unde rezultă rezultă că pentru $\mathbf{J}_s = 0$: $\mathbf{n} \cdot \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \cdot \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2$. Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului.

Și de această dată, condițiile de frontieră se aleg dintre componentele care se conservă la trecerea prin suprafețele de discontinuitate:

$$\mathbf{H}_t = (\mathbf{n} \cdot \nu \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.147)$$

sau B_n echivalent cu cunoașterea lui $\mathbf{A}_t$. Cel mai adesea acestea sunt nule. Se va vedea ulterior că pentru a asigura unicitatea soluției $\mathbf{A}$ mai trebuie adăugate

condiții de frontieră suplimentare, referitoare la A_n .

Trebuie să remarcăm că folosirea potențialelor $\mathbf{A} - V$ cu etalonarea Coulomb nu este singura alegere. Se poate folosi potențialul vector $\mathbf{T}$ al densității de curent, împreună cu potențialul magnetic scalar redus Φ , cu sau fără etalonări. În [78] sunt prezentate nu mai puțin de 13 astfel de formulări. Scopul lor este de a rezolva cât mai precis probleme, la care constantele de material au variații extrem de ample în domeniul de calcul.

1.7.7 Regimul electrodinamic general variabil (ED)

Ipotezele simplificatoare ale regimului

Pentru a menține concizia prezentării, studiul fenomenelor electromagnetice se face în medii liniare, omogene și imobile.

Ecuatiile de ordinul întâi

Câmpul electromagnetic în medii liniare și imobile se studiază sistematic cu următoarele forme locale ale legilor generale (*Ecuatiile Maxwell*) completate cu legile de material în medii liniare:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.148}$$

În consecință, câmpul electromagnetic este complet descris de cele două potențiale: unul vector $\mathbf{A}$ și altul scalar V , funcții de spațiu și timp, *numite potențiale electrodinamice*.

În acest regim se preferă folosirea relației Loerntz:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t},\tag{1.149}$$

pentru etalonarea potențialului magnetic vector, în locul relației Coulomb folosită în regimurile MG și MQS.

Ecuatiile de ordinul al doilea

Ecuatiile de ordinul al doilea pe care le satisfac intensitățile câmpurilor electric și magnetic se deduc în medii omogene, luând rotorul primei, respectiv a celei de a doua ecuații (1.148) și ținând seama de celelalte ecuații, cum urmează [88]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow (1.150) \\ &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Potențialele vector și scalar satisfac în acest regim ecuațiile:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}; \\ \Delta V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon},\end{aligned}\tag{1.151}$$

în care intervin mărimile cu distribuție necunoscută $\mathbf{J}$ și ρ . Dacă acestea se exprimă în funcție de câmpul electric se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right); \\ \nabla A &= \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.152}$$

Relațiile obținute sunt ecuații cu derivate parțiale, vectoriale, liniare, de ordinul doi, de tip hiperbolic. Ele descriu propagarea câmpului electromagnetic în medii liniare și omogene.

În acest regim sunt folosite toate cele trei constante de material: μ, ε, σ , ceea ce indică faptul că sunt luate în considerare toate efectele: inductiv, capacitaiv și rezistiv. Ele sunt acum distribuite spațial împreună și se influențează reciproc. În zonele neconductoare ($\sigma = 0$) ecuațiile își pierd termenul difuziv-parabolic (derivata în-tâi față de timp) și descriu propagarea fără pierderi a câmpului electromagnetic, datorată interacțiunii capacitiv-inductive distribuite (regimul EDFP al câmpului). Pentru a fi bine formulate, problemele în acest regim trebuie să aibă pe lângă condițiile de frontieră și condiții inițiale nenule, deoarece sursele interne de câmp sunt nule, mediile fiind considerate liniare.

1.7.8 Reprezentarea în complex a ecuațiilor câmpurilor sinusoidale

Cel mai des întâlnit și în același timp cel mai simplu regim periodic permanent al câmpului electromagnetic este *regimul sinusoidal*, în care variația în timp a mărimilor fizice caracteristică câmpului este de forma:

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_x) \quad (1.153)$$

unde x - *valoare instantanee*; $t \in (-\infty, \infty)$ - variabila timp; X - *valoarea efectivă*; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - *pulsația*; T - *perioada*; f - *frecvența*; φ_x - *faza inițială a mărimii* x .

În regimul de variație sinusoidală (numită și armonică) toate mărimile unei probleme au frecvență comună de variație, fiecare mărime scalară având specific doar doi parametri reali: valoarea efectivă X și faza inițială φ_x . Din acest motiv, putem asocia fiecărei funcții $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ cu variație sinusoidală ($x \in \mathcal{S}$ - clasa funcțiilor sinusoidale de pulsație ω) în mod biunivoc un număr complex $\underline{X} \in \mathbb{C}$, definit de relația $\underline{X} = X_e e^{j\varphi_x}$, în care j este unitatea imaginară, cu $j^2 = -1$.

Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale este o transformată $\mathcal{C} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ liniară.

Principalul avantaj al reprezentării complexe constă în faptul că ecuațiile diferențiale în variabila timp se transformă în ecuații algebrice (complexe), dar în care variabila timp nu mai intervine (ecuațiile au un caracter staționar). Din acest motiv, analiza câmpurilor cu variație temporală sinusoidală este făcută aproape exclusiv prin reprezentare complexă.

Primul lucru care trebuie remarcat este faptul că un sistem se poate afla în regim armonic, doar dacă ecuațiile sale au un caracter liniar. În cazul câmpului electromagnetic, acesta presupune că toate cele trei relații de material sunt liniare:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\epsilon} \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \bar{\mu} \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \bar{\sigma} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

În caz contrar, dacă un câmp dintr-o relație de material este sinusoidal (de exemplu intensitatea câmpului), atunci celălalt (de exemplu, inducția câmpului) nu va mai avea variație armonică în timp.

În regim armonic câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele funcții vectoriale cu componente complexe:

- inducția electrică în complex $\underline{\mathbf{D}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- intensitatea câmpului electric în complex $\underline{\mathbf{E}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;

- densitatea de curent în complex $\underline{\mathbf{J}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- inducția magnetică în complex $\underline{\mathbf{B}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- intensitatea câmpului magnetic în complex $\underline{\mathbf{H}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- densitatea de sarcină în complex $\underline{\rho} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;

în care $d = 1, 2, 3$, în funcție de dimensiunea problemei.

Câmpurile vectorial - complexe satisfac următoarele ecuații obținute din ecuațiile lui Maxwell prin aplicarea transformatei complexe $\mathcal{C}$ și ținând cont de proprietățile acesteia, de liniaritate și de faptul că transformă derivatele față de timp în operații algebrice de înmulțire cu $j\omega$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mathbf{B}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \\ \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\bar{\epsilon}} \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{B}} &= \underline{\bar{\mu}} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{J}} &= \underline{\bar{\sigma}} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i\end{aligned}\tag{1.155}$$

Pentru a evidenția curentul imprimat, ca sursă a câmpului magnetic, s-a presupus că densitatea $\underline{\mathbf{J}}_i$ are și ea o variație sinusoidală în timp, cunoscută.

Aplicând primelor două ecuații, operatorul divergență, se obțin consecințele:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} &= 0, \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} &= -j\omega \underline{\rho},\end{aligned}\tag{1.156}$$

care sunt formele complexe ale legii fluxului magnetic și a teoremei conservării sarcinii. Iată deci că legea fluxului magnetic este o consecință a relațiilor fundamentale ale acestui regim, dar relația:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}\tag{1.157}$$

trebuie adăugată relațiilor fundamentale independente.

Pentru a simplifica notațiile, vom renunța la barele care indică tipul tensorial sau complex al mărimii respective.

Eliminând inducțiile se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\sigma} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i + j\omega \underline{\epsilon} \underline{\mathbf{E}},\end{aligned}\tag{1.158}$$

din care prin aplicarea roturului se obțin ecuațiile de ordinul doi, valabile în medii omogene:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) + (j\omega \underline{\mu} \underline{\sigma} - \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon}) \underline{\mathbf{E}} = -\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{J}}_i\tag{1.159}$$

și

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon) \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_i, \quad (1.160)$$

Acestea sunt ecuații vectoriale cu derivate parțiale de tip Helmholtz complex cu operator *rot-rot* și parametrul $\gamma = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$. În regimul fără pierderi $\gamma = -\omega^2\mu\varepsilon$ este real iar în regim MQS $\gamma = j\omega\mu\sigma$ devine pur imaginar.

Ecuații asemănătoare sunt satisfăcute și de potențialele vector și scalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla V \\ \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) &= (\sigma + j\omega\varepsilon) (-j\omega\mathbf{A} + \nabla V). \end{aligned} \quad (1.161)$$

Constatăm că studiul regimului tranzitoriu al câmpului electromagnetic folosind transformata Laplace conduce la ecuații asemănătoare ale câmpului, singura deosebire fiind aceea ca variabila pur imaginara $j\omega$ este înlocuită cu variabila complexă s .

Dacă interesează și distribuția de sarcină, atunci se calculează câmpul scalar complex:

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}. \quad (1.162)$$

Constatăm spre deosebire de regimul tranzitoriu, în regimul sinusoidal nu sunt necesare condiții inițiale.

Prin particularizări ale constantelor de material se obțin diferite regimuri ale câmpului armonic:

- $\bar{\varepsilon} = 0$ - regimul cvasistaționar inductiv (anelectric);
- $\bar{\mu} = 0$ - regimul cvasistaționar capacitiv (amagnetic);
- $\bar{\sigma} = 0$ - regimul general variabil în medii fără pierderi.

În modelarea electromagnetică se întâlnesc situații în care un dispozitiv are în părțile sale diferite regimuri ale câmpului electromagnetic, obținute prin anularea locală a constantelor de material.

În concluzie, putem afirma că studiul regimurilor câmpului este util nu numai pentru înțelegerea fenomenelor electromagnetice în cazuri particulare ci și pentru o înțelegere mai profundă a modului în care interacționează componentele câmpului în cazul general.

NOȚIUNI DE BAZĂ

1.1 Obiectul și metodele termotehnicii

Termodinamica este un domeniu important al fizicii clasice care se ocupă cu studiul *mișcării termice* și al proceselor care produc modificări ale acesteia. Particulele oricărui corp cu temperatură diferită de zero absolut au mai multe tipuri de mișcare termică (agitație moleculară): translație, vibrație, rotație etc. Mărimile fizice care caracterizează aceste tipuri de mișcare (viteză, frecvență, amplitudine, viteză unghiulară etc.) se pot modifica prin schimb de energie cu alte corpuri. În sfera largă de studiu a termodinamicii intră practic toate procesele care pot produce modificări ale caracteristicilor mișcării termice, deci nu numai procese termice, ci și chimice, electrice, magnetice etc.

Pentru determinarea proprietăților corpurilor, pentru descrierea condițiilor de echilibru și pentru analizarea proceselor care produc modificări ale acestora, în termodinamică se folosesc metode de studiu la scară *macroscopică* și la scară *microscopică*.

La scară macroscopică este utilizată *metoda fenomenologică*, dezvoltată de Carnot, Joule, Clausius, Thomson, Gibbs, Helmholtz și Nernst. Aceasta se bazează pe observații empirice și considerații teoretice asupra proceselor reversibile. Ulterior, Onsager și Prigogine au utilizat metoda fenomenologică pentru studiul proceselor ireversibile.

La scară microscopică sunt utilizate *metoda cinetico-moleculară* (dezvoltată de Maxwell și Boltzmann), *metoda statistică* (Gibbs) și, mai recent, *metoda informațională* (Tribus și Jeans). Începând cu a doua jumătate a secolului trecut, acestea s-au dezvoltat împreună și au condus la fundamentarea teoriei cuantelor (fizica cuantică).

Metoda cinetico-moleculară se bazează pe studiul teoretic al comportării particulelor (atomi sau molecule) care alcătuiesc un sistem, utilizând legile mecanicii pentru descrierea mișcărilor particulelor și estimând comportarea medie a unui număr foarte mare de particule. Metoda statică estimează comportarea la scară macroscopică a unui număr foarte mare de particule pe baza teoriei probabilităților, ea despărțindu-se practic de teoria cinetico-moleculară după apariția teoriei cuantelor. Aceste două metode au multe elemente comune, ele fiind uneori utilizate împreună, sau chiar considerate ca formând o structură unitară.

Metoda informațională a fost fundamentată de către un inginer (Tribus) în scopul studierii stărilor de echilibru și neechilibru și a proceselor ireversibile (reale), în special în calcule inginerești.

Trebuie însă bine înțeles faptul că, indiferent de metoda de studiu utilizată, termodinamica furnizează întotdeauna rezultate numai la scară macroscopică. Deși o particulă are masă și energie (mărimi specifice mecanicii), ea nu are temperatură sau entalpie (mărimi specifice termodinamicii), acestea din urmă fiind proprietăți care sunt definite și utilizate numai pentru numere foarte mari de particule ($>10^{24}$).

Termotehnica, sau **termodinamica tehnică** este știința care se ocupă cu aplicarea în practică a legilor și principiilor termodinamicii. Obiectivul principal al termotehnicii este acela de a îmbunătăți tehnologiile de conversie, transport și utilizare a diferitelor forme de energie (mai ales termică și mecanică), în principal prin reducerea pierderilor și creșterea randamentelor. Termotehnica poate deci fi considerată *Știința energiei*, fiind o disciplină tehnică fundamentală în pregătirea specialiștilor din domeniul energiei. Prima carte de termodinamică tehnică a fost publicată de Rankine în 1859.

1.2 Sistem, stare, parametri de stare, proces, transformare

Un *sistem* este un ansamblu de un număr finit de elemente care interacționează între ele, precum și cu alte elemente care nu aparțin sistemului. Ceea ce se găsește în afara sistemului se numește *mediu înconjurător* sau *mediu ambiant*. Sistemul este delimitat de mediul înconjurător prin suprafețe *reale* sau *imaginare* numite *granițe* sau *frontiere*.

Un sistem este definit (ales) arbitrar, ținând cont de corpurile (elementele) de interes în studiul unui anumit proces. Pentru definirea unui sistem este necesară alegerea elementelor care îl compun și a frontierelor, definirea proprietăților de interes ale acestor elemente, precum și a funcțiilor de legătură (relațiilor de interacțiune) care au o influență asupra procesului studiat, dintre elementele sistemului și dintre sistem și mediul înconjurător. Un sistem definit pentru studiul unui proces termodinamic se numește *sistem termodinamic*.

Se numește *sistem închis* un sistem care nu poate schimba materie cu mediul ambiant. Un sistem închis are în general frontiere reale, dar nu neapărat fixe, astfel încât volumul sistemului se poate modifica. Masa sistemului rămâne însă constantă și se mai numește *masă de control*. Un exemplu de sistem termodinamic închis este un gaz aflat într-un cilindru închis etanș de un piston care se poate deplasa axial în interiorul cilindrului (figura 1.1).

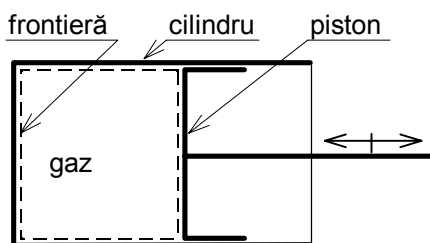


Figura 1.1: Sistem închis

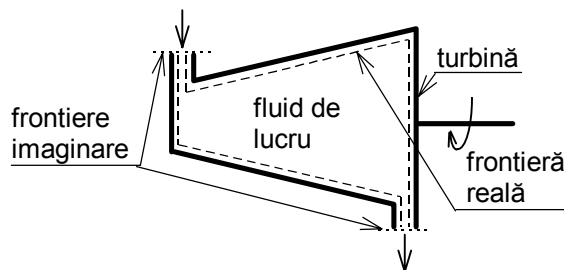


Figura 1.2: Sistem deschis

Se numește *sistem deschis* un sistem care schimbă materie cu mediul înconjurător. Un sistem deschis poate avea atât frontiere reale, cât și frontiere imaginare, acestea fiind însă fixe, astfel încât volumul sistemului rămâne constant și se mai numește *volum de control*. Un exemplu de sistem termodinamic deschis este fluidul de lucru care se destinde într-o turbină (figura 1.2). În acest caz, frontierele reale sunt pereții turbinei, iar frontierele imaginare sunt secțiunile de intrare și ieșire a fluidului de lucru. Într-un sistem deschis de acest tip fluidul de lucru se deplasează (curge) continuu prin volumul de control.

În practică se utilizează și mașini sau instalații în care au loc procese complexe, astfel încât în timpul unora dintre ele sistemele sunt închise, iar în timpul altora sistemele sunt deschise. Un exemplu de acest tip este cilindrul unui motor cu ardere internă în patru timpi. Pe parcursul timpilor de admisie (introducerea aerului sau a amestecului de aer și combustibil) și de evacuare (a gazelor de ardere) supapa respectivă este deschisă, deci sistemul este deschis, în timp ce pe parcursul timpilor de comprimare și destindere supapele de admisie și evacuare sunt închise, sistemul fiind deci închis.

Un sistem se numește *omogen* dacă proprietățile sale fizice și compoziția chimică sunt constante în tot volumul. Compoziția chimică este constantă nu numai pentru o substanță pură, ci și pentru un amestec de două sau mai multe substanțe ale căror participare la amestec este aceeași în tot volumul (amestec omogen). Un domeniu omogen al unui sistem a fost denumit de Gibbs *fază*, deci un sistem omogen conține o singură fază. Fazele pot fi stări de agregare diferite ale aceleiași substanțe chimice. Un amestec de apă și gheață, sau de substanțe diferite aflate în aceeași stare de agregare, de exemplu un amestec de apă și ulei (ambele în faze lichide, dar cu densități diferite), formează un sistem *eterogen* sau *neomogen*.

Un sistem care nu poate schimba energie cu mediul înconjurător se numește *sistem izolat*, iar un sistem care schimbă energie cu mediul înconjurător se numește *sistem neizolat*. Sistemul închis din figura 1.1 este un sistem neizolat, deoarece prin deplasarea pistonului (la scară microscopică) sistemul poate schimba energie cu mediul înconjurător prin interacțiune mecanică, deci sub formă de lucru mecanic. Pentru ca un sistem să nu poată schimba lucru mecanic cu mediul înconjurător frontierele acestuia trebuie să fie fixe, un astfel de sistem fiind numit *sistem rigid*. Există, de altfel, denumiri specifice pentru sisteme care nu pot schimba cu mediul înconjurător energie printr-un anumit tip de interacțiune, dar nu toate acestea sunt studiate în cadrul termotehnicii.

Condițiile sau situația în care se găsește un sistem la un anumit moment în timp se numește *stare*. Proprietățile care caracterizează (definesc) starea sistemului se numesc *mărimi de stare* sau *parametri de stare*. Parametrii de stare sunt doar aceia care depind strict de starea în care se află sistemul la momentul respectiv, deci ale căror valori numerice nu depind de trecutul sistemului, adică de alte stări în care s-ar fi putut afla sistemul într-un moment anterior. Valorile unora dintre parametrii de stare pot fi măsurate direct, iar ale altora pot fi determinate indirect, prin calcul, în funcție de valori măsurate.

Pentru a defini un sistem se aleg ca parametri de stare proprietățile care influențează sau sunt influențate de fenomenul studiat, deci care se consideră a fi utile pentru rezolvarea problemelor avute în vedere. În cadrul termotehnicii se utilizează în general *parametrii termici de stare* presiune, volum și temperatură (care pot fi măsurati direct) și *parametrii calorigici de stare* energie internă, entalpie, entropie și exergie (care se calculează). Doi dintre aceștia sunt definiți în alte domenii ale științei și anume volumul în Geometrie (Pitagora ~ 550 î.C.) și presiunea în Mecanică (Pascal - 1663 d.C.). Ceilalți sunt definiți în cadrul termodinamicii.

Parametrii ale căror valori nu depind de masa sistemului (ca de exemplu presiunea și temperatura) se numesc *parametri intensivi*. Aceștia se simbolizează în general prin litere mici, de exemplu presiunea fiind notată de obicei cu “*p*”. O excepție de la această regulă este temperatura, care prin convenție se notează cu “*T*” când este vorba de temperatura absolută în scara Kelvin și cu “*t*” în orice altă scară de măsurare a temperaturilor.

Parametrii ale căror valori depind de masa sistemului se numesc *parametri extensivi* și se simbolizează în general prin litere mari: volumul - “*V*”; energia internă - “*U*”; entalpia - “*H*” sau “*I*”; entropia - “*S*”. O excepție de la această regulă este exergia, notată de obicei “*Ex*”. Din orice parametru extensiv se poate obține prin raportare la masa sistemului un parametru intensiv, numit *parametru specific masic* (sau uneori, prescurtat, *parametru specific*). Acesta este simbolizat cu litera mică corespunzătoare parametrului extensiv respectiv. De exemplu, volumul specific masic se notează cu “*v*” și este inversul densității, fiind definit ca:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] \quad (1.1)$$

unde: *V* [m³] - volumul total;
m [kg] - masa sistemului;
ρ [kg/m³] - densitatea.

Analog se definesc energia internă specifică masică “*u*”, entalpia specifică masică “*h*” sau “*i*”, entropia specifică masică “*s*” și exergia specifică masică “*ex*”.

Starea unui sistem poate fi *de echilibru* sau *de neechilibru* (în afară de echilibru) după cum parametrii de stare rămân constanți sau respectiv se modifică atunci când sistemul este izolat față de mediul înconjurător. În cazul unui sistem termodinamic, din condițiile de izolare față de mediul înconjurător se pot exclude influențele câmpurilor de forțe externe, ca de exemplu câmpul gravitațional.

Într-o *stare de echilibru termodinamic* masa, presiunea și temperatura sistemului sunt constante în tot volumul sistemului. Un sistem care se află în echilibru termodinamic cu mediul înconjurător are aceeași presiune și temperatură cu acesta, deci nu este necesar să fie izolat pentru a rămâne în starea de echilibru respectivă.

Modificarea stării unui sistem termodinamic, respectiv trecerea sa dintr-o stare inițială într-o stare finală, datorită interacțiunilor cu mediul înconjurător (prin schimb de energie) se numește *proces termodinamic*. Un proces în urma căruia sistemul revine în starea inițială, fără a trece de două sau mai multe ori prin nici o stare intermediară, se numește *proces ciclic*.

Mărimile care caracterizează un proces termodinamic se numesc *parametri de proces*. Spre deosebire de parametrii de stare, parametrii de proces nu există (și deci nu au valori) în stări de echilibru ale sistemului, ci doar în timpul desfășurării unui proces. Parametrii de proces sunt în general *cantități* care caracterizează interacțiunile dintre sistem și mediul înconjurător și care produc *modificări (variații)* ale valorilor parametrilor de stare. Un exemplu de parametru de proces este *lucrul mecanic*, acesta fiind definit (în cadrul Mecanicii) ca o cantitate de energie schimbată prin interacțiune mecanică, la scară microscopică.

Un proces în urma căruia un sistem poate reveni în starea inițială fără să apară modificări remanente nici în sistem, nici în afara acestuia, se numește *proces reversibil*. Un proces care nu este reversibil se numește *irreversibil*. Reversibilitatea și ireversibilitatea proceselor va fi studiată mai amănunțit în legătură cu principiul al doilea al termodinamicii.

Sucesiunea stărilor prin care trece un sistem în cadrul unui proces termodinamic din starea inițială în starea finală se numește *transformare termodinamică*. În continuare, o transformare din starea inițială “1” în starea finală “2” va fi notată “transformarea 1→2”.

O transformare pe parcursul căreia sistemul trece numai prin stări de echilibru infinit apropiate se numește *transformare cvasistatică*. Dacă cel puțin una dintre stările intermediare este o stare de neechilibru, transformarea se numește *nestatică*.

Postulatul de stare arată că *orice stare de echilibru a unui sistem termodinamic este complet definită de valorile a doi parametri de stare independenți*.

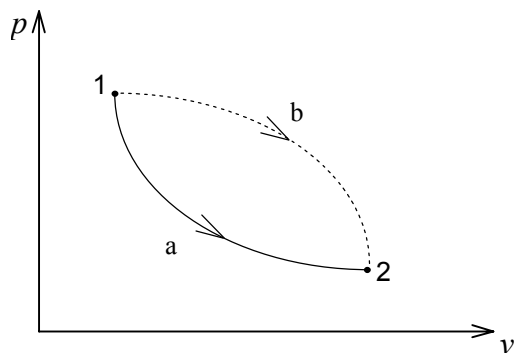


Figura 1.3: Transformare cvasistatică (1a2) și nestatică (1b2) în diagrama p - v

Pe baza postulatului de stare rezultă că toate stările de echilibru ale unui sistem pot fi reprezentate în diagrame plane în funcție de doi parametri de stare independenți. O diagramă des utilizată în termotehnică este diagrama p - v (figura 1.3). Într-o diagramă de acest tip transformările cvasistatice se pot reprezenta prin curbe continue, numite *curba* sau *drumul transformării*, deoarece la acestea toate stările intermediare sunt stări de echilibru, de exemplu transformarea 1→2 pe drumul “a” (sau transformarea 1a2) din figura 1.3. Transformărilor nestatice nu pot fi reprezentate prin curbe continue, deoarece cel puțin o stare intermediară nu este stare de echilibru, deci nu poate fi reprezentată printr-un punct pe diagrama plană. Ele pot fi reprezentate aproximativ prin linii întrerupte, dar acestea nu reprezintă practic drumul transformării, ci doar faptul că sistemul trece din starea inițială 1 în starea finală 2 în urma unei transformări nestatice (în figura 1.3, transformarea nestatică 1b2).

Pentru reprezentarea diagramelor plane de acest tip se alege de obicei doi parametri de stare intensivi, diagrama fiind astfel valabilă pentru unitatea de masă (1 kg) din sistemul respectiv. Pentru un sistem de masă “ m ”, valorile parametrilor extensivi se obțin prin înmulțire cu masa sistemului.

Există procese în timpul cărora nu toți parametrii de stare sunt independenți. În cazul unui proces de schimbare a stării de agregare (solidificare - topire, vaporizare - condensare, sublimare - desublimare), presiunea și temperatura nu sunt parametri independenți. Cât timp presiunea sistemului este constantă și temperatura sa rămâne constantă, până când toată masa sistemului trece într-o singură stare de agregare. Numărul de stări de echilibru posibile în timpul unui astfel de proces este infinit, deoarece partea din substanța respectivă care se află în una din cele două stări de agregare poate avea orice valoare între 0 și 100%. Într-o diagramă p - T , toată această infinitate de stări va fi reprezentată printr-un punct, în timp ce în orice alte coordonate ele vor fi reprezentate printr-o curbă continuă.

1.3 Proprietățile parametrilor de stare și de proces

Considerăm o *transformare elementară* (infinit mică) în urma căreia sistemul trece într-o stare finală infinit apropiată celei inițiale. În unele cazuri particulare, unul sau mai mulți parametri de stare rămân constanți, dar cel puțin unul dintre ei trebuie să se modifice pentru ca starea finală să fie diferită de cea inițială. Variația parametrilor de stare în urma unui proces elementar se numește *variație elementară* (ea fiind infinit mică) și matematic aceasta reprezintă diferențiala totală a mărimii respective (de exemplu dp - diferențiala totală a presiunii sau variația elementară a presiunii în urma unei transformări elementare).

De asemenea există integrala definită a diferențialei oricărui parametru de stare, între oricare două stări de echilibru (1 și 2), ea reprezentând variație finită a parametrului respectiv în urma unei transformări finite 1→2, de exemplu:

$$\int_1^2 dp = p_2 - p_1 \quad (1.2)$$

De câte ori un sistem revine într-o stare dată, toți parametrii de stare revin la valoarea corespunzătoare stării respective, deci integrala pe un contur închis a diferențialei oricărui parametru de stare este nulă, de exemplu:

$$\oint dp = 0 \quad (1.3)$$

Dintre parametrii de proces utilizați în studiul termotehnicii, doar lucrul mecanic este definit în cadrul Mecanicii, ca fiind cantitatea de energie schimbată prin interacțiune mecanică, la scară microscopică. Lucrul mecanic se simbolizează în general cu " L " și, fiind o cantitate de energie, unitatea sa de măsură în Sistemul Internațional este cea a energiei, respectiv Joule (J). Lucrul mecanic este un parametru intensiv, deoarece în aceleași condiții de interacțiune între sistem și mediul înconjurător, cantitatea de energie schimbată depinde de masa sistemului. Prin raportare la masa sistemului, se poate defini parametrul intensiv corespunzător, *lucru mecanic specific masic*, simbolizat " l " și având ca unitate de măsură în Sistemul Internațional [J/kg]:

$$l = \frac{L}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (1.4)$$

Fiind un parametru de proces, lucrul mecanic nu caracterizează starea sistemului, ci procesul prin care trece acesta. Lucrul mecanic specific schimbat cu mediul înconjurător de unitatea de masă din sistem se numește *lucru mecanic specific elementar*. Acesta este o cantitate infinit mică de energie, nu o variație a unei mărimi, deci nu reprezintă o diferențială totală și, pentru a pune în evidență această diferență față de parametrii de stare, se utilizează în general notația " δl ", iar pentru lucrul mecanic elementar al unui sistem de masă " m ", " δL ".

În cazul unui proces în timpul căruia sistemul suferă o transformare finită 1→2, lucrul mecanic și lucrul mecanic specific schimbat de sistem, respectiv de unitatea de masă din sistem,

reprezintă suma cantităților corespunzătoare schimbate pe parcursul tuturor transformărilor elementare care compun transformarea finită, deci sunt cantități finite și nu diferențe. Pentru a pune în evidență aceste deosebiri față de parametrii de stare, se vor utiliza următoarele notații:

$$l_{12} = \int_1^2 \delta l \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (1.5)$$

$$L_{12} = m \cdot l_{12} = \int_1^2 m \cdot \delta l = \int_1^2 \delta L \quad [\text{J}] \quad (1.6)$$

Indicii reprezintă stările inițială și finală ale transformării (în această ordine) și limitele de integrare nu se scriu la dreapta simbolului integralei, ci deasupra (sau chiar la stânga) lui.

1.4 Ecuații termice de stare

Conform postulatului de stare, orice parametru de stare se poate determina în funcție de oricare alți doi parametri de stare independenți. O relație funcțională între trei parametri de stare se numește *ecuație de stare*. Dacă toți cei trei parametri dintr-o ecuație de stare sunt parametri termici de stare (presiunea, volumul specific și temperatura), atunci aceasta se numește *ecuație termică de stare* și matematic se poate scrie în forma următoare:

$$f(p, v, T) = 0 \quad (1.7)$$

Dacă se utilizează un parametru de stare extensiv, respectiv volumul total (V), atunci în ecuația termică de stare se va utiliza și masa (m), adică:

$$f(p, V, T, m) = 0 \quad (1.8)$$

Explicitând unul dintre parametrii ca funcție de ceilalți doi, ecuația termică de stare se poate pune sub oricare din formele de mai jos, care sunt la rândul lor ecuații termice de stare.

$$\begin{cases} p = p(v, T) \\ v = v(p, T) \\ T = T(p, v) \end{cases} \quad (1.9)$$

Deoarece presiunea, volumul specific și temperatura sunt parametrii de stare, acceptă diferențială totală și atunci ecuațiile termice de stare se pot scrie sub formă diferențială astfel:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v dT \quad (1.10)$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT \quad (1.11)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right)_p dv \quad (1.12)$$

Înlocuind în ecuația 1.10 diferențiala temperaturii (dT) cu ecuația termică de stare în formă diferențială (1.12), se obține:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p dv + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T dv$$

Utilizând proprietățile derivatelor:

$$\frac{dv}{dp} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \quad \text{și} \quad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T}$$

și împărțind cu dp , rezultă:

$$1 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$$

Se obține astfel forma diferențială generală a ecuației termice de stare, valabilă pentru orice sistem termodinamic, indiferent de natura sa chimică:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_p \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -1 \quad (1.13)$$

Derivatele parțiale din ecuația 1.13 au semnificație fizică, reprezentând variația unuia dintre parametri în funcție de altul, când al treilea rămâne constant. Pe baza acestora se pot defini următorii *coeficienți termodinamici*:

- coeficientul de dilatare izobarică: $\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_p$ (1.14)

- coeficientul de compresibilitate izocorică: $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ (1.15)

- coeficientul de compresibilitate izotermică: $\gamma = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ (1.16)

Înlocuind în ecuația 1.13 expresiile coeficienților termodinamici, se obține o relație de calcul a presiunii de forma:

$$p = \frac{\alpha}{\beta \cdot \gamma} \quad (1.17)$$

Valorile coeficienților termodinamici sunt determinate experimental pentru substanțele des utilizate în practică și pot fi utilizate pentru calcularea unor parametri de stare atunci când nu este cunoscută ecuația termică de stare pentru substanța respectivă.

Pentru a putea compara proprietățile termodinamice ale diferitelor substanțe, mai ales ale gazelor, în aceleași condiții de presiune și temperatură, este necesară definirea unei stări de referință, numită de obicei stare normală și care poate fi ușor reprodusă practic în condiții de laborator. În prezent sînt acceptate două stări de referință, definite prin anumite valori ale presiunii și temperaturii. Acestea sunt:

1. *Starea normală fizică*, notată cu indice "N", în care temperatura este $t_N = 0^\circ\text{C}$ (sau $T_N = 273,15\text{ K}$) și presiunea $p_N = 760\text{ mmHg} = 760\text{ torr} = 1\text{ atm} = 101.325\text{ N/m}^2 = 101.325\text{ Pa} = 1,01325\text{ bar}$;
2. *Starea normală tehnică*, notată cu indicele "n", în care temperatura este $t_n = 20^\circ\text{C}$ (sau $T_n = 293,15\text{ K}$) și presiunea $p_n = 1\text{ kgf/cm}^2 = 1\text{ at} = 98066,5\text{ Pa} \cong 0,981\text{ bar}$.

PRINCIPIUL ZERO AL TERMODINAMICII

Principiul zero al termodinamicii a fost enunțat de Maxwell în 1891, după ce Clausius, în 1850, reformulasese enunțurile și numerotase principiile întâi și al doilea, iar aceste denumiri erau deja utilizate curent. În aceste condiții, deoarece principiul descoperit de Maxwell trebuie enunțat, în ordine logică, înaintea principiului întâi, i-a fost atribuit numărul “zero”.

După cum a arătat Sommerfeld (1962), enunțarea fiecărui principiu al termodinamicii necesită introducerea unui nou parametru de stare, care nu este definit în nici un alt domeniu al științei. Pentru enunțarea principiului zero este necesară definirea *temperaturii* ca parametru de stare, aceasta fiind una dintre noțiunile fundamentale ale termodinamicii. Principiul zero al termodinamicii permite fundamentarea logică a definirii scărilor de temperatură și a aparatelor de măsură numite generic termometre.

Noțiunea de temperatură și mai ales de cald și rece există de mult în limbajul comun, senzația psihofiziologică de cald și frig, foarte subiectivă de altfel, fiind un mijloc de estimare a temperaturii, dar în nici un caz de măsurare a acesteia. Încercări de a construi aparate care să pună în evidență modificări ale temperaturii au existat încă din antichitate, dar procesul de măsurare presupune definirea unei unități de măsură și a unei scări de valori pentru mărimea respectivă și etalonarea corespunzătoare a aparatului de măsură. Primele dispozitive cunoscute care puneau în evidență modificări ale temperaturii au fost construite de Filon din Bizanț (sec. III și II î.C.) și de Heron din Alexandria (sec. I î.C.), acestea fiind însă doar *termoscoape*, nu termometre. La mijlocul secolului XVII d.C. au apărut primele termoscoape cu coloană de lichid, care au dus la definirea primelor scări empirice de temperatură și la construirea primelor termometre, care nu mai erau influențate și de variațiile de presiune. Revenirea la termometrele cu gaz (în sec. XVIII d.C.) a dus la apariția conceptelor de *gaz ideal* și *temperatură absolută*. Istoricul acestei evoluții este foarte bine sintetizat de Stoian și Valeria Petrescu (1983), într-o prezentare plăcută, care poate constitui o lectură interesantă chiar și pentru nespecialiști.

2.1 Temperatura

Pentru a introduce logic, printr-o metodă deductivă, un nou parametru de stare, se pot face experiențe cu o instalație de tipul celei prezentate în figura 2.1.

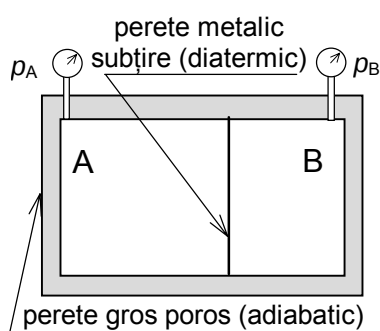


Figura 2.1: Echilibrul termic

Instalația constă din două incinte A și B, despărțite de un perete metalic rigid foarte subțire și izolate față de mediul înconjurător prin pereți rigizi groși dintr-un material poros. În fiecare dintre cele două incinte se poate introduce orice cantitate dorită dintr-un anumit gaz. Volumele celor două incinte (V_A și V_B) se cunosc, iar presiunile gazelor din interiorul acestora (p_A și p_B) pot fi măsurate. Modificând masele de gaz din interior (m_A și m_B), se vor modifica și volumele specifice ale celor două sisteme ($v_A = V_A/m_A$ și $v_B = V_B/m_B$), cu toate că volumele totale nu se modifică. Se pot deci modifica stările termodinamice ale sistemelor A și B pentru realizarea experiențelor descrise în continuare.

Inițial se introduc în incintele A și B masele m_{A1} și m_{B1} (cunoscute) din două gaze diferite. În fiecare incintă se stabilește câte o stare de echilibru inițială, cu parametrii de stare v_A și p_{A1} , respectiv v_B și p_{B1} . Ulterior, se constată că presiunile din cele două incinte încep să se modifice (masele și deci și volumele specifice rămân constante, sistemele A și B fiind închise). După un anumit timp, numit *timp de relaxare*, se constată că presiunile din incintele A și B rămân constante, stabilizându-se la valorile p_{Af} și respectiv p_{Bf} , diferite de valorile inițiale din

fiecare incintă și în general diferite între ele ($p_{Af} \neq p_{Ai}$, $p_{Bf} \neq p_{Bi}$ și $p_{Af} \neq p_{Bf}$). Deci în final se stabilește o nouă stare de echilibru în fiecare sistem, precum și în sistemul compus (A+B), care rămâne stabilă în continuare indiferent de modificările care apar în mediul înconjurător.

Din analizarea acestui experiment simplu se pot trage mai multe concluzii și se pot introduce unele noțiuni specifice studiului termodinamicii.

În starea inițială, sistemele A și B, deși erau fiecare în câte o stare de echilibru, nu erau și în echilibru între ele, deoarece aceste stări inițiale se modifică fără o intervenție din exterior. Ele nu pot interacționa cu mediul înconjurător, deoarece după trecerea timpului de relaxare stările lor nu se modifică, indiferent de modificările care apar în mediul înconjurător. Înseamnă că sistemele A și B interacționează numai între ele. Peretele metalic subțire care separă cele două incinte fiind rigid, el nu se deplasează la scară macroscopică, deci nu există interacțiune mecanică între sistemele A și B, după cum nu există nici alte tipuri de interacțiuni, definite în alte domenii ale științei (de exemplu interacțiune electrică sau magnetică). Interacțiunea dintre cele două sisteme are loc la scară microscopică și se numește *interacțiune termică*. Starea de echilibru care se stabilește în sistemul compus (A+B) în urma interacțiunii termice se numește stare de *echilibru termic*. Un perete care permite interacțiunea termică se numește *diatermic*, iar un perete care nu permite acest tip de interacțiune se numește *adiabatic*. Peretele metalic subțire este un bun exemplu de frontieră diatermică, iar peretele gros și poros de frontieră adiabatică. Evaluarea cantitativă a interacțiunii termice se va studia în cadrul principiului întâi al termodinamicii, iar evaluarea calitativă în cadrul principiului al doilea al termodinamicii.

Conform postulatului de stare, orice stare de echilibru a unui sistem termodinamic este complet determinată de valorile a doi parametri de stare independenți, de exemplu presiunea și volumul specific. În ambele sisteme presiunile se modifică în transformarea de la starea inițială la starea finală, în timp ce volumele specifice rămân constante. În concluzie există un alt parametru de stare care trebuie să se modifice în ambele sisteme în timpul acestei transformări și care în starea inițială avea valori diferite în sistemele A și B, iar în starea finală are aceeași valoare în ambele sistemele, astfel încât sistemul compus (A+B) să ajungă într-o stare de echilibru termic. Acest parametru se numește *temperatură* și se va nota provizoriu cu " θ " (nu cu " t " sau " T ", deoarece nu este încă definită o scară de temperaturi). Temperatura este un parametru intensiv deoarece într-o stare de echilibru are aceeași valoare în tot sistemul, deci nu depinde de masa acestuia. Se poate acum da o definiție sintetică a temperaturii.

Temperatura unui sistem este un parametru de stare intensiv care arată dacă acesta se află sau nu în echilibru termic cu un alt sistem sau cu mediul înconjurător.

Pentru fiecare pereche de valori ale presiunii și volumului specific în oricare din cele două sisteme există o singură valoare a temperaturii în sistemul respectiv, dată de ecuația de stare $\theta = \theta(p, v)$. Pentru un anumit sistem se pot atribui valori numerice temperaturii în unele stări de echilibru, ceea ce încă nu înseamnă ca a fost definită o scară de temperaturi. Dacă se alege de exemplu sistemul B, pentru o stare de echilibru determinată de valorile p_B și v_B , se poate atribui temperaturii valoarea θ_{B1} .

Se poate realiza un set de experimente în care starea de echilibru termic a sistemului compus (A+B) să se realizeze astfel încât starea finală a sistemului B să fie aceeași, deci în care parametrii de stare ai sistemului B să aibă valorile p_{Bf1} , v_{Bf1} și respectiv $\theta_{Bf1} = \theta(p_{Bf1}, v_{Bf1})$, dar în care stările finale ale sistemului A sunt diferite, determinate de perechile de parametri de stare (p_{Af1}, v_{Af1}) , (p_{Af2}, v_{Af2}) , (p_{Af3}, v_{Af3}) etc. În toate aceste stări ale sistemului A temperatura are este aceeași cu a sistemului B, adică θ_{Bf1} .

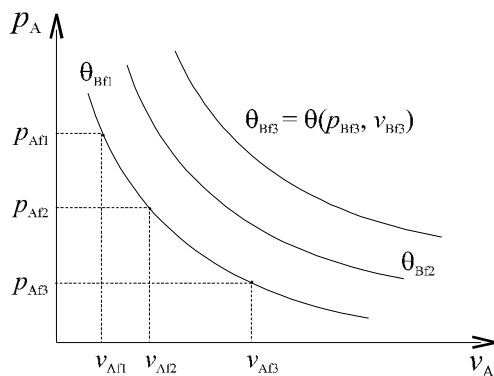


Figura 2.2: Izoterme ale sistemului A

diagrama p - v izotermele corespondente ale celor două sisteme, respectiv izotermele pentru care temperatura are aceeași valoare în ambele sisteme. Se constată că forma curbilor nu este identică pentru cele două sisteme, deci ele depind de natura sistemului. În concluzie ecuația termică de stare este o caracteristică de material, ea având forme diferite pentru sisteme cu compoziție chimică diferită.

2.2 Principiul zero al termodinamicii

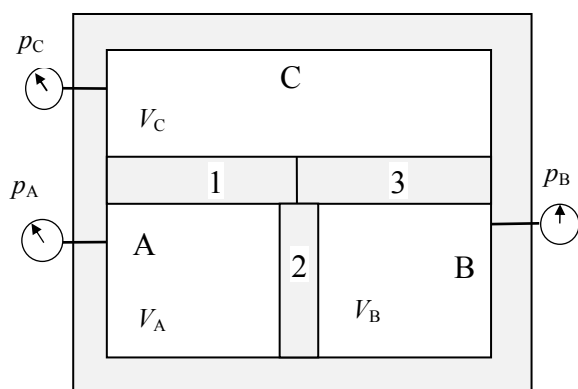


Figura 2.3: Instalație experimentală pentru ilustrarea principiului zero al termodinamicii

Considerăm o instalație experimentală similară celei din figura 2.1, dar formată din trei incinte (A, B și C) de volume cunoscute (V_A , V_B și V_C) în care se pot introduce cantități cunoscute din trei gaze diferite (m_A , m_B și m_C) ale căror presiuni pot fi măsurate (p_A , p_B și p_C).

Sistemul compus (A+B+C) este izolat adiabatic față de mediul înconjurător. Pereții 1, 2 și 3 dintre cele trei incinte sunt amovibili, putând fi înlocuiți independent astfel încât să permită sau nu interacțiunea termică între sistemele pe care le separă, deci astfel încât să fie diatermici sau adiabatici după necesitățile experimentului (vezi figura 2.3).

Se pot efectua o serie de experimente astfel încât să se obțină o stare finală în care de exemplu dacă pereții 1 și 2 sunt pe rând sau în același timp înlocuiți cu pereți diatermici, în timp ce peretele 3 este adiabatic, presiunile în cele trei incinte să nu se modifice. Aceasta înseamnă că sistemul A este simultan sau succesiv în echilibru termic atât cu sistemele B și C. Dacă în această stare se înlocuiesc pereții 1 și 2 cu pereți adiabatici și peretele 3 cu unul diatermic, se constată că presiunile sistemelor B și C rămân de asemenea constante, deci și sistemele B și C se află în echilibru termic între ele. Pe scurt, dacă simultan sau succesiv $\theta_A = \theta_B$ și $\theta_A = \theta_C$, atunci și $\theta_B = \theta_C$, ceea ce este de altfel evident.

Atunci **principiul zero al termodinamicii** care se poate enunța astfel:

Dacă un sistem se află simultan sau succesiv în echilibru termic cu alte două sisteme atunci acestea sunt la rândul lor în echilibru termic între ele.

Principiul zero al termodinamicii permite stabilirea scărilor de temperaturi și totodată construirea unor aparate pentru măsurarea temperaturii numite generic termometre.

Definirea unei scări empirice de temperaturi necesită alegerea unui anumit sistem ca *sistem etalon*, pentru care se definește o scară de valori și se alege o denumire pentru unitatea de măsură a temperaturii. Definirea scărilor empirice de temperaturi va fi tratată în următorul subcapitol.

Pentru realizarea unui termometru, se alege un sistem care are un parametru măsurabil care variază cu temperatura, numit *proprietate termometrică* (de exemplu: presiunea unui gaz la volum constant, volumul unui gaz la presiune constantă, lungimea coloanei de lichid într-un tub capilar, rezistivitatea electrică a unui conductor etc.). Sistemul ales, împreună cu aparatul de măsură al proprietății termometrice, se numește *termometru*. Termometrul este *etalonat* prin aducere în echilibru termic cu anumite stări ale sistemului etalon. În fiecare stare aleasă se marchează pe scala aparatului de măsură al proprietății termometrice valoarea numerică atribuită temperaturii în scara definită pentru sistemul etalon. Se aduce apoi termometrul în echilibru termic cu un alt sistem a cărui temperatură se dorește a fi cunoscută și se citește valoarea temperaturii indicată de termometru. Pe baza principiului zero al termodinamicii, se poate spune că temperatura sistemului de măsurat este aceeași cu cea a sistemului etalon în starea în care acesta era în echilibru termic cu acea stare a termometrului în care indicatorul se afla în dreptul aceluiași reper de pe scala aparatului de măsură a proprietății termometrice.

2.3 Scări de temperatură

Pentru definirea unei scări empirice de temperatură este necesară alegerea unui sistem etalon și a uneia sau mai multor stări ușor reproductibile ale acestuia, cel puțin în condiții de laborator, numite *puncte fixe*. Pentru punctele fixe se atribuie o valoare temperaturii și se definește unitatea de măsură. Primele scări de temperatură au fost definite prin alegerea a două puncte fixe, atribuirea unor valori numerice temperaturilor din aceste stări și definirea unității de măsură prin împărțirea intervalului de temperaturi astfel obținut într-un anumit număr de părți egale, care au fost în general denumite grade. Primele puncte fixe utilizate erau definite destul de imprecis, ca de exemplu temperatura zăpezii și a flăcării unei lumânări (Santorio), temperatura corpului uman sănătos (Fahrenheit), sau stări de schimbare a stării de agregare ale anumitor substanțe cu compoziția chimică nu foarte precis definită și la presiuni neprecizate. Punctele fixe ale scărilor empirice de temperaturi utilizate în prezent sunt definite foarte exact.

Scala de temperaturi a cărei utilizare este încă practic generalizată în Europa este scara Celsius. Aceasta este o scară empirică, definită de fapt de J. P. Christin în 1742 și utilizată din 1743 de A. Celsius într-o formă inversată. Sistemul etalon utilizat pentru definirea scării Celsius este apa pură. Punctele fixe sunt definite în prezent astfel:

1. starea de topire-solidificare la presiune normală fizică ($p_N = 760$ torr), în care se atribuie temperaturii valoarea zero;
2. starea de vaporizare-condensare la presiune normală fizică, în care se atribuie temperaturii valoarea 100.

Intervalul de temperatură dintre cele două puncte fixe se împarte în 100 de părți egale. O diviziune reprezintă unitatea de măsură a temperaturii în scara astfel definită și se numește grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Astfel definită, scara Celsius corespunde scării absolute Kelvin.

Scala empirică de temperaturi utilizată în țările anglo-saxone este scara definită de Fahrenheit în 1709. Aceasta este definită analog scării Celsius, dar are alte puncte fixe și altă unitate de măsură, numită grad Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Punctul de 0°F corespunde unui anumit

amestec refrigerent, iar punctul de 100°F (în prezent 96°F) temperaturii corpului uman sănătos. Scara termodinamică absolută corespondentă scării Fahrenheit este scara Rankine.

O altă metodă de definire a unei scări empirice de temperatură constă în alegerea unui sistem etalon și a unui punct fix, atribuirea unei valori numerice temperaturii punctului fix ales, alegerea unui sistem cu o proprietate termometrică (numit corp termometric), determinarea funcției de variație a proprietății termometrice cu temperatura și atribuirea unui nume unității de măsură rezultate.

Singurul punct fix folosit din anul 1954 este *punctul triplu solid - lichid - vapori al apei*, respectiv starea în care apa pură coexistă în echilibru în stările de agregare solidă, lichidă și gazoasă. Această stare este relativ simplu de realizat în condiții de laborator. În acest scop se utilizează un vas de sticlă cu pereți dubli. Volumul dintre pereții dubli se umple cu apă (pentru evacuarea aerului), după care o parte din apă este scoasă fără a permite intrarea aerului și se închide tubul de comunicare cu exteriorul. Se introduce un lichid refrigerent în vas și se răcește apa dintre pereții dubli până când se observă formarea unei cruste groase de gheață pe peretele interior. Se golește lichidul refrigerent și se așteaptă până când între crusta de gheață și peretele interior apare un strat de apă. În acest moment apa dintre pereții dubli se află în punctul triplu. Presiunea vaporilor de apă din partea superioară a incintei dintre pereții dubli este $p_t = 610,8 \text{ N/m}^2 = 0,006108 \text{ bar}$. Dacă se utilizează pentru proprietatea termometrică unitatea de măsură din sistemul internațional și se atribuie temperaturii punctului triplu al apei valoarea 273,16, atunci scara de temperaturi astfel definită se suprapune scării termodinamice absolute de temperaturi, deci se poate utiliza pentru temperatură notația “ T ” și unitate de măsură Kelvin (K). În sistemul anglo-saxon de unități de măsură, temperatura punctului triplu al apei are în scara termodinamică absolută Rankine valoarea $t_t = 491,688^\circ\text{R}$ (grade Rankine).

Corpurile termometrice sunt sisteme care au un parametru măsurabil care variază (în general liniar) cu temperatura, cel puțin atunci când alți parametrii sunt menținuți constanți. În practică se aleg câteva sisteme particulare în calitate de corpuri termometrice, pentru a servi ca *termometre standard*. Acestea sunt:

- termocuplul, la presiune constantă și curent zero, proprietatea termometrică fiind tensiunea termoelectromotoare (t_{tem});
- termorezistența, (de obicei din rezistență platină), la presiune constantă și alimentată la o tensiune constantă, proprietatea termometrică fiind rezistența electrică (R);
- lichidul dintr-un rezervor care comunică cu un tub capilar, proprietatea termometrică fiind lungimea coloanei de lichid în tubul capilar;
- un gaz (în general la presiune foarte mică) aflat la presiune sau la volum constant, proprietatea termometrică fiind celălalt parametru termic de stare.

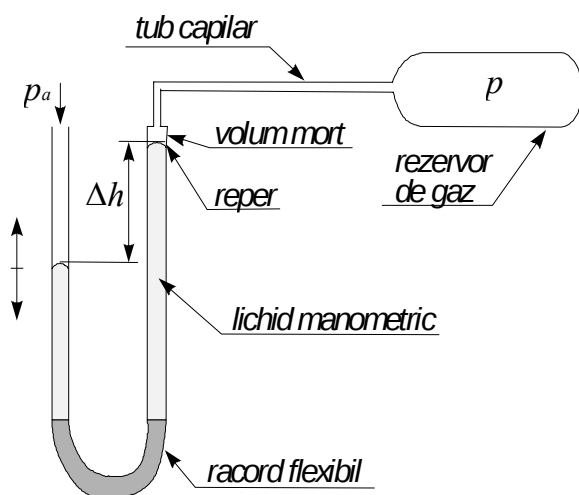


Figura 2.4: Termometru cu gaz la volum constant

Vom considera în continuare cazul unui termometru cu gaz la volum constant, a cărei construcție este prezentată schematic în figura 2.4. Rezervorul de gaz are pereți metalici, deci rigizi (astfel încât volumul său să rămână constant) și subțiri, deci diatermici. Rezervorul comunică prin tubul capilar cu unul din brațele manometrului diferențial tub U cu coloană de lichid. Pentru ca volumul gazului să rămână constant indiferent de presiunea acestuia, nivelul lichidului manometric va fi menținut în dreptul reperului marcat pe tubul cu care comunică rezervorul. În acest scop, cele două tuburi ale manometrului comunică printr-un racord flexibil care permite deplasarea pe verticală a celui de al doilea tub, care este deschis la partea superioară.

Manometrul diferențial măsoară diferența dintre presiunea gazului din rezervor (p) și presiunea atmosferică (p_a):

$$p - p_a = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad [\text{N/m}^2] \quad (2.1)$$

unde: ρ $[\text{kg/m}^3]$ - densitatea lichidului manometric;
 g $[\text{m/s}^2]$ - accelerația gravitațională ($9,80665 \text{ m/s}^2$);
 Δh $[\text{m}]$ - diferența de nivel între cele două tuburi ale manometrului.

Conform ecuației termice de stare, temperatura gazului din rezervor este o funcție de presiune și volumul specific: $\theta = \theta(p, v)$. În cazul în care volumul gazului rămâne constant, temperatura este funcție numai de presiunea. Postulând variația liniară a temperaturii gazului cu presiunea (la volum constant), se poate scrie:

$$\theta = \theta(p)_{v=\text{ct.}} = a \cdot p \quad ; \text{ la } v = \text{constant} \quad (2.2)$$

Valoarea constantei de proporționalitate “a” se calculează măsurând presiunea gazului (p_t) în starea de echilibru termic cu sistemul etalon aflat în punctul fix (punctul triplu al apei) și atribuind o valoare numerică temperaturii corpului termometric în această stare. Unitatea de măsură a constantei de proporționalitate se determină din unitatea de măsură a presiunii (N/m^2) și cea atribuită temperaturii. Atribuind temperaturii punctului fix valoarea numerică 273,16 și unitatea de măsură Kelvin (K), se obține:

$$a = \frac{273,16}{p_t} \left[\frac{\text{K}}{\text{N/m}^2} \right] \quad (2.3)$$

Temperatura în scara termometrului cu gaz la volum constant, notată “t”, se poate calcula, în funcție de presiunea măsurată (p) a gazului în starea respectivă, cu relația:

$$t = 273,16 \cdot \left(\frac{p}{p_t} \right) \quad [\text{K}] \quad (2.4)$$

Măsurătorile presiunii sunt afectate de erori cauzate de următoarele surse, dintre care unele pot fi evitate prin proiectarea și construcția termometrului, iar altele trebuie corectate prin calcul:

1. Temperatura gazului variază în tubul capilar de la valoarea din rezervor (care se dorește a fi măsurată), până la cea din volumul mort (temperatura mediului ambiant);

2. Volumele rezervorului, tubului capilar și spațiului mort se modifică datorită variației temperaturii și chiar și a presiunii;
3. Datorită efectului Knudsen, în tubul capilar apare un gradient de presiune dacă diametrul acestuia este comparabil cu drumul liber al particulelor gazului;
4. Cu cât scade temperatura gazului, crește efectul de adsorbție al acestuia pe pereții metalici ai rezervorului și ai tubului capilar;
5. O parte din gaz se poate dizolva în lichidul manometric, care în plus nu este perfect incompresibil, adică își poate modifica densitatea la modificarea presiunii, chiar dacă este menținut la temperatură constantă.

Deoarece ecuația termică de stare este specifică fiecărui gaz în parte, este de așteptat ca scara de temperaturi a termometrului cu gaz la volum constant să depindă de natura gazului. În plus, variația liniară a temperaturii cu presiunea la volum constant a fost postulată, deci nu a fost demonstrată sau verificată în cele prezentate mai sus.

2.4 Scara de temperaturi a termometrului cu gaz ideal la volum constant

Se poate constata experimental că în alte stări ale gazului în afară de cea de echilibru cu punctul triplu al apei se obțin valori diferite ale temperaturii în funcție de natura gazului și de cantitatea de gaz care ocupă volumul constant.

Presupunem că efectuăm câte un set de experimente identice utilizând succesiv în rezervorul unui termometru cu gaz la volum constant (figura 2.4) trei gaze diferite, denumite “gaz 1”, “gaz 2” și “gaz 3”. Se introduce în rezervorul termometrului o anumită cantitate de gaz, astfel încât presiunea acestuia în punctul fix (starea de echilibru cu punctul triplu al apei) să fie $p_t = 1.000 \text{ mmHg}$. Se aduce rezervorul de gaz în echilibru termic cu un sistem conținând apă pură care vaporizează la presiunea stării normale fizice ($p_N = 760 \text{ mmHg}$). Se măsoară presiunea gazului din rezervorul termometrului și se calculează temperatura cu relația (2.4). Se repetă această măsurătoare scoțând succesiv anumite cantități de gaz din rezervor, astfel încât presiunea acestuia în punctul fix să fie 750 mmHg, 500 mmHg și respectiv 250 mmHg. Se constată că utilizând cantități diferite din același gaz se obțin patru valori diferite ale temperaturii măsurate în aceeași stare (de vaporizare-condensare a apei la presiunea normală fizică), deci se obțin patru scări diferite de temperaturi. Se reprezintă grafic cele patru valori ale temperaturii în funcție de presiunea gazului din rezervor în punctul fix (diagrama $T-p_t$ din figura 2.5). Se repetă același set de experimente utilizând succesiv gazul 2 și gazul 3, reprezentând valorile măsurate pe aceeași diagramă $T-p_t$.

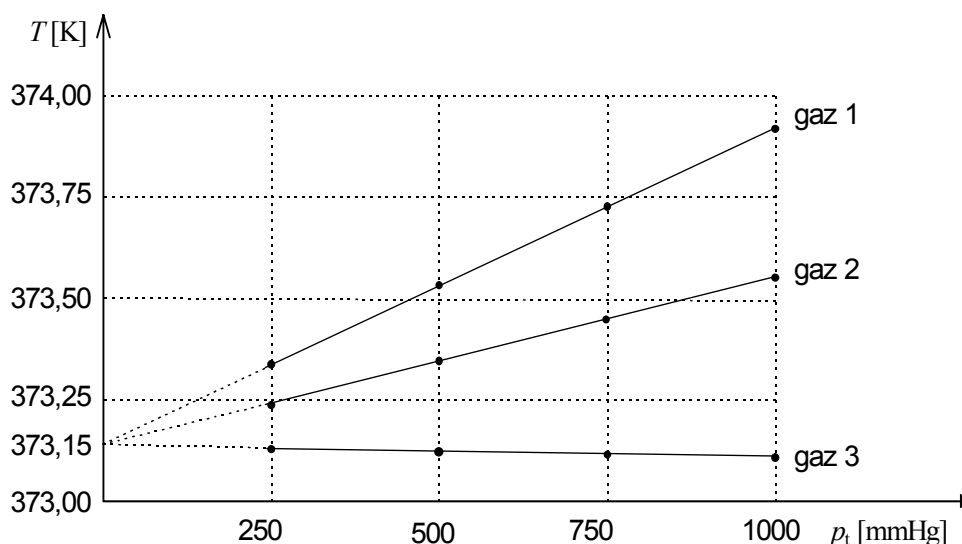


Figura 2.5: Temperatura stării de vaporizare-condensare a apei la presiunea de 760 mmHg, măsurată cu diferite termometre cu gaz la volum constant

Se constată că punctele corespunzătoare fiecărui gaz în parte se ordonează după câte un segment de dreaptă. În plus, dacă se prelungesc aceste segmente de dreaptă, se constată că toate se intersectează în același punct, la temperatura de 373,15 K și la presiunea gazului în punctul fix $p_t = 0$ mmHg.

În concluzie, scara de temperaturi a termometrului cu gaz la volum constant depinde nu numai de natura gazului, ci și de cantitatea de gaz din rezervor. Atunci însă când presiunea gazului tinde spre zero, toate gazele tind să se comporte identic, indicând aceeași valoare pentru temperatura stării de vaporizare-condensare a apei la presiunea normală fizică.

Diferențele în comportarea gazelor sunt cauzate de mărimea diferită a moleculelor (atât ca volum, cât și ca masă) și de forțele diferite de interacțiune dintre molecule. Odată cu scăderea presiunii scade numărul de molecule din același volum, deci crește distanța dintre ele, volumul propriu al acestora și forțele de interacțiune dintre ele devenind neglijabil.

Un gaz ale cărui molecule nu au volum propriu și între ale cărui molecule nu există forțe de interacțiune se numește *gaz ideal*. Gazul ideal nu există în realitate, el fiind doar un concept, dar orice gaz real tinde să se comporte ca un gaz ideal atunci când presiunea lui tinde spre zero. În continuare, prin *gaze ideale* (la plural) vom înțelege de fapt gaze reale a căror comportare tinde spre comportarea gazului ideal.

Scara de temperaturi a termometrului cu gaz ideal la volum constant este practic tot o scară empirică, dar ea corespunde perfect *scării termodinamice absolute de temperaturi*, care nu depinde de natura unui anumit sistem etalon și care se poate defini pe baza principiului al doilea al termodinamicii. Din acest motiv, temperatura măsurată în scara termometrului cu gaz ideal la volum constant se notează cu " T " și unitatea de măsură este Kelvin (K), la fel ca în cazul temperaturii absolute.

Dacă temperaturii corespunzătoare punctului triplu al apei i se atribuie în scara de temperatură a termometrului cu gaz ideal la volum constant valoarea de 273,16 K, atunci se constată experimental că aceasta corespunde și scării Celsius. După cum se constată din graficul prezentat în figura 2.5, valoarea temperaturii indicată de termometrul cu gaz ideal la volum constant este de 373,15 K pentru starea de vaporizare-condensare a apei la presiunea normală fizică, stare care este al doilea punct fix în scara Celsius, în care temperaturii i se atribuie valoarea de 100°C. Se poate constata experimental că temperaturii de 0°C a primului punct fix al scării Celsius (starea de solidificare-topire a apei la presiunea normală fizică), îi corespunde în scara de temperaturi a termometrului cu gaz ideal la volum constant valoarea de

273,15 K. Scările Celsius și Kelvin sunt deci echivalente, având unitatea de măsură de aceeași mărime ($1\text{ K} = 1^\circ\text{C}$), dar alt punct de zero și anume $0^\circ\text{C} = 273,15\text{ K}$, respectiv temperatura de zero absolut $0\text{ K} = -273,15^\circ\text{C}$. Temperatura punctului triplu al apei este $273,16\text{ K} = 0,01^\circ\text{C}$. Relația de transformare a temperaturii din scara Celsius în scara Kelvin este:

$$T [\text{K}] = t [^\circ\text{C}] + 273,15 \quad (2.5)$$

În mod similar se poate defini o scară absolută de temperaturi care să aibă unitatea de măsură egală cu gradul Fahrenheit și punctul de zero la temperatura de 0 absolut. Aceasta se numește scară Rankine și are unitatea de măsură numită grad Rankine ($^\circ\text{R}$). Prin convenție, temperatura se notează cu “ t ” atât în scara Fahrenheit, cât și în scara Rankine. Relația de transformare a temperaturii din scara Fahrenheit în scara Rankine este:

$$t [^\circ\text{R}] = t [^\circ\text{F}] + 459,67 \quad (2.6)$$

Între unitățile de măsură din scările Kelvin, Celsius, Rankine și Fahrenheit există următoarea relație:

$$1\text{ K} = 1^\circ\text{C} = 5/9^\circ\text{R} = 5/9^\circ\text{F} \quad (2.7)$$

Dacă punctele de zero ale scărilor termodinamice absolute Kelvin și Rankine sunt identice (temperatura de zero absolut), deci $0\text{ K} = 0^\circ\text{R}$, punctele de zero ale scărilor Celsius și Fahrenheit sunt diferite și anume $0^\circ\text{C} = -32^\circ\text{F}$. Relația de transformare a temperaturii din scara Fahrenheit în scara Celsius este:

$$t [^\circ\text{C}] = 5/9 \cdot (t [^\circ\text{F}] - 32) \quad (2.8)$$

Termometrele cu gaze ideale la volum constant prezintă avantajul că sunt relativ ușor de realizat practic și sunt suficient de precise pentru a fi folosite ca termometre etalon în instituții de metrologie, variația temperaturii gazelor ideale fiind aproape liniară cu presiunea pe un domeniu larg de temperatură. Ele nu pot însă reproduce perfect scara termodinamică absolută de temperaturi, deoarece aceasta este definită pe baza unor procese reversibile, acestea neputând fi realizate în practică, după cum se va vedea în cadrul studierii principiului al doilea al termodinamicii.

La a VII-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți din anul 1927 a fost adoptată *Scara Internațională Practică de Temperatură* (SIPT), care a fost ulterior revizuită de patru ori, ultima dată în 1968 (la a XIII Conferință de Măsuri și Greutăți). Această scară este o scară convențională de temperatură alesă astfel încât să poată constitui o aproximare bună a scării termodinamice absolute de temperatură. SIPT-68 este definită pe baza a 11 puncte fixe principale și a 26 de puncte fixe secundare realizate ca stări bifazice sau triple ale anumitor substanțe, în condiții foarte exact precizate. Aceste puncte fixe sunt definite între 13, 81 K (punctul triplu al hidrogenului) și 1.337,58 K (punctul de topire-solidificare al aurului la presiunea normală fizică $p_N = 101.325\text{ N/m}^2$) și servesc la etalonarea aparatelor de măsură pentru diferite domenii de temperatură. Au fost de asemenea stabilite relații matematice pentru corelarea indicațiilor aparatelor de măsură cu valorile temperaturilor respective.

Conform STAS 2100-73, în România se utilizează Scara Internațională Practică de Temperatură (SIPT-68) pentru a aproxima scara termodinamică absolută.

În figura 2.6 sunt prezentate schematic valorile câtorva stări specifice în cele patru scări de temperatură utilizate practic în prezent.

	t [°C]	T [K]	t [°R]	t [°F]
vaporizarea-condensarea apei	100	373,15	671,670	212,00
starea normală tehnică	20	293,15	527,670	68,000
punctul triplu al apei	0,01	273,16	481,688	32,018
starea normală fizică	0	273,15	491,670	32,000
zero Fahrenheit	-17,78	255,37	459,670	0
zero absolut	-273,15	0	0	-459,670

Figura 2.6: Temperaturi în scările Celsius, Kelvin, Rankine și Fahrenheit

3. PRINCIPIUL ÎNTÂI AL TERMODINAMICII

3.1 Introducere

Primul principiu al termodinamicii este legea care se referă la transformarea și conservarea energiei. Este cunoscut faptul că energia este prezentă în natură în multe forme distincte. Diferite domenii ale științei studiază anumite forme particulare de energie. De exemplu mecanica se ocupă de studiul energiei cinetice a unui sistem aflat în mișcare față de un sistem de referință considerat fix și a energiei potențiale a unui sistem aflat sub acțiunea câmpului gravitațional terestru. În electromagnetism sunt introduse alte forme de energie asociate câmpului electric și magnetic. În chimie se studiază formele de energie asociate forțelor de legătură moleculare, atomice și nucleare. Toate acestea sunt de obicei studiate independent unele de altele. Termodinamica în general corelează toate formele de energie și descrie variațiile energiei unui sistem în funcție de interacțiunile care au loc prin frontierele acestuia. Se poate deci deduce că legile termodinamicii au o aplicabilitate vastă.

Legea conservării energiei cinetice a fost enunțată în 1686 de Leibnitz (pe baza teoriei elaborate în 1657 de Huygens, Wallis, Wren și Mariotte).

Primul principiu al termodinamicii a fost formulat pentru prima dată ca enunțare a echivalenței dintre căldură și lucru mecanic într-o lucrare din 1832 a lui Carnot, publicată însă postum abia în 1882, când acest principiu era deja larg cunoscut și acceptat. Echivalența dintre căldură și lucru mecanic apare pentru prima oară explicit în lucrările publicate de Mayer și de Colding (1842÷1843), mai mulți savanți efectuând ulterior cercetări experimentale pentru a determina echivalentul caloric al căldurii. Pe baza lucrărilor anterioare, în special ale lui Joule (din 1843), în 1847 von Helmholtz prezintă public, la Ședința Societății de fizică din Berlin, principiul întâi al termodinamicii sub forma generalizată de lege universală a naturii și anume *legea transformării și conservării energiei*.

Pentru a putea formula enunțurile și scrie expresiile matematice ale principiului întâi al termodinamicii este necesară introducerea unui nou parametru de stare numit energie internă. În plus, se mai introduce un parametru de stare derivat (entalpia), un parametru de proces specific termodinamicii (căldura) și mai multe tipuri de lucru mecanic specifice termodinamicii.

3.2 Energia internă

Conceptul de *energie* a fost utilizat pe parcursul dezvoltării mecanicii clasice sub denumirea de “*forță vie*” introdusă de Leibnitz în 1686. Denumirea de ENERGIE a fost dată de Young în 1817.

Prin *energie totală* a unui sistem fizic se înțelege capacitatea acestuia de a acționa asupra altor sisteme prin diferite forme de interacțiune: mecanică, termică, chimică, electrică, magnetică etc.

Energia totală se notează cu “ E ” și unitate sa de măsură în Sistemul Internațional se numește Joule (notație [J]). Dacă un sistem trece dintr-o stare inițială 1 într-o stare finală 2, în care are energiile E_1 și respectiv E_2 , după care revine în starea inițială 1, variația totală a energiei va fi nulă, deoarece energia revine la valoarea E_1 . Atunci:

$$\oint dE = 0 \quad (3.1)$$

adică energia este un parametru de stare.

Energia totală a unui sistem este dată de suma energiilor tuturor subsistemelor care compun sistemul, deci energia totală depinde de masa sistemului, fiind un parametru de stare

extensiv. Se poate defini un parametru de stare intensiv numit *energie specifică masică* (sau pe scurt *energie specifică*) astfel:

$$e = \frac{E}{m} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3.2)$$

Forma de energie specifică termodinamicii, deci care nu este definită în nici un alt domeniu al științei, este *energia internă*, notată " U ". Energia internă este un parametru de stare intensiv care reprezintă capacitatea unui sistem de a interacționa cu alte sisteme în cadrul unui proces termodinamic. Energia internă a fost denumită și *energie calorică* și încă se mai utilizează denumirea de *energie termică*.

Conceptul de energie internă a fost introdus de von Helmholtz în 1847, sub forma de energie cinetică și potențială a particulelor, în cadrul analizei cinetico-moleculare a principiului întâi al termodinamicii. Acest concept a fost ulterior clar definit de Clausius în 1859, sub denumirea de *conținut de căldură*, iar denumirea de energie internă a fost dată de Rankine pe la 1860.

Cum energia totală a unui sistem cuprinde toate formele posibile de energie, pentru cazurile întâlnite uzual în termotehnică se poate scrie :

$$E = E_c + E_p + U + E_0 \quad [\text{J}] \quad (3.3)$$

unde: E_c [J] - energia mecanică cinetică;
 E_p [J] - energia mecanică potențială;
 U [J] - energia internă;
 E_0 [J] - suma tuturor celorlalte forme de energie.

Sau energia specifică masică, respectiv pentru unitatea de masă a sistemului:

$$e = \frac{E}{m} = e_c + e_p + u + e_0 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3.4)$$

unde: $e_c = E_c/m$ [J/kg] - energia cinetică specifică;
 $e_p = E_p/m$ [J/kg] - energia potențială specifică;
 $u = U/m$ [J/kg] - energia internă specifică;
 $e_0 = E_0/m$ [J/kg] - suma tuturor celorlalte forme de energie specifică.

Noțiunea de energie internă este legată de structura microscopică a materiei. O parte a energiei interne, numită *energie internă cinetică* (notată U_{cin}) reprezintă energia cinetică a particulelor care au o mișcare complexă în interiorul sistemului și anume o deplasare relativă față de limitele sistemului datorită interacțiunii cu acestea și a interacțiunii cu celelalte particule ale sistemului, o mișcare de spin (de rotație în jurul axei proprii) și o mișcare de vibrație. Deoarece între particulele unui sistem există forțe de legătură (de atracție și respectiv de respingere), energia internă asociată acestui câmp de forțe se numește *energie internă potențială* (notată U_{pot}). O altă parte a energiei interne a sistemului (notată U_0) o reprezintă suma energiilor asociate forțelor de legătură din interiorul moleculelor și atomilor, aceasta rămânând constantă dacă nu se modifică natura chimică a sistemului. În cadrul unui proces termodinamic în care nu au loc reacții chimice se pot deci modifica numai U_{cin} și U_{pot} , suma acestora fiind denumită *energie internă sensibilă* (notată U_{sens}). Atunci se poate scrie:

$$U = U_{\text{cin}} + U_{\text{pot}} + U_0 = U_{\text{sens}} + U_0 \quad [\text{J}] \quad (3.5)$$

Ca parametri de stare intensivi (specifici masici), respectiv pentru o masă unitară:

$$u = u_{\text{cin}} + u_{\text{pot}} + u_0 = u_{\text{sens}} + u_0 \quad [\text{J/kg}] \quad (3.6)$$

Valoarea absolută a energiei interne nu poate fi stabilită decât atribuind o valoare arbitrară energiei interne a sistemului într-o stare de referință. În calculele termodinamice nu interesează valoarea absolută a energiei interne, ci doar variația acesteia în timpul unui proces în care sistemul suferă o transformare 1→2:

$$\Delta U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1 \quad (3.7)$$

Pentru un sistem, dat componenta U_0 a energiei interne rămâne constantă, deci variază doar energia internă cinetică și energia internă potențială, adică energia internă sensibilă:

$$\Delta U = \Delta U_{\text{cin}} + \Delta U_{\text{pot}} = \Delta U_{\text{sens}} \quad (3.8)$$

3.3 Entalpia

Constatând că în multe cazuri întâlnite în studiul termodinamicii apare des suma dintre energia internă și produsul dintre presiune și volum, în 1869 Kamerlingh a arătat că este convenabil să se utilizeze un nou parametru de stare pe care l-a numit *entalpie* și l-a notat cu “ H ” (în termotehnică se utilizează și notația “ T ”), care are aceeași unitate de măsură cu energia (Joule - [J]) și este definit ca:

$$I = H = U + p \cdot V \quad [\text{J}] \quad (3.9)$$

Parametrul de stare intensiv numit *entalpie specifică masică* (sau pe scurt *entalpie specifică*) definit prin raportare la masa sistemului este:

$$i = h = u + p \cdot v \quad [\text{J/kg}] \quad (3.10)$$

Deoarece U , p și V (respectiv v) sunt parametri de stare, este evident că și entalpia (respectiv entalpia specifică) este un parametru de stare. Deși are ca unitate de măsură Joule, care este unitatea de măsură a energiei, entalpia nu are în general un sens fizic. Ea este doar o notație, o mărime de calcul, folosirea ei fiind avantajoasă deoarece simplifică nu numai scrierea, ci și calculele, apărând uzual în tabele și diagrame termotehnice.

Fiind parametru de stare, entalpia are toate proprietățile parametrilor de stare:

$$\begin{cases} di = du + d(p \cdot v) = du + p \cdot dv + v \cdot dp \\ \oint di = 0 \\ \Delta i = \int_1^2 di = i_2 - i_1 = (u_2 - u_1) + (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1) \end{cases} \quad (3.11)$$

3.4 Căldura

Căldura este unul din principalii parametri definiți și utilizați în studiul termodinamicii. Noțiunile de “căldură” și “frig” au existat în limbajul comun cu mult timp înainte de dezvoltarea termodinamicii ca știință. Cu toate acestea, definirea conceptului de *căldură* în forma sa actuală a fost un proces lung, finalizat abia spre sfârșitul secolului XIX, după dezvoltarea termodinamicii statistice. Utilizarea termenului “căldură” fără o definiție clară și uneori impropriu, a dus la confuzii de limbaj, dintre care unele s-au perpetuat până în prezent.

Teoria aproape unanim acceptată pentru explicarea proceselor termice observate empiric a fost *teoria caloricului*, elaborată de Lavoisier în 1788. Conform acestei teorii, principiul căldurii, sau caloricul, era considerat un fluid material indestructibil care putea trece de la un corp la altul, fiind un element simplu fundamental al naturii (Petrescu, S. și Valeria

Petrescu, 1983). Cu toate că teoria caloricului este în prezent depășită, aceasta a permis dezvoltarea calorimetriei într-o doctrină simplă, coerentă și eficientă. În plus, unii termeni au rămas în limbajul tehnic actual: calorimetrie, calorimetru, calorie, capacitate calorică etc.

După cum am văzut în cazul experiențelor cu ajutorul cărora s-a introdus parametrul de stare temperatură, între sistemele termodinamice se poate schimba energie fără ca acestea să interacționeze mecanic, la scară macroscopică. Acest tip de interacțiune, care are loc la scară microscopică, a fost denumit *interacțiune termică*. În urma interacțiunii termice între două sisteme se modifică în general temperatura ambelor sisteme, sau cel puțin a unuia, dacă celălalt sistem are masa mult mai mare, caz în care joacă rolul de *termostat* față de sistemul mai mic.

Interacțiunea termică are loc în principal prin transmiterea energiei cinetice prin ciocnire între particulele celor două sisteme și a peretelui diatermic dintre acestea. Particulele sistemului cu temperatură mai mare au o viteză mai mare de deplasare, deci o energie cinetică mai mare. Prin ciocnire cu particulele peretelui despărțitor, ele cedează o parte din energia lor cinetică particulelor peretelui, care la rândul lor o cedează, tot prin ciocnire, particulelor sistemului cu temperatură mai mică. În consecință, se modifică mai ales energia internă cinetică (U_{cin} , respectiv u_{cin} pentru unitatea de masă) a celor două sisteme, ceea ce duce și la modificarea temperaturii acestora. Interacțiunea termică încetează după un anumit timp, numit *timp de relaxare*, atunci când temperaturile celor două sisteme devin egale.

Cantitatea de energie schimbată de un sistem prin interacțiune termică se numește *căldură*, se notează în general cu litera “ Q ” și are unitatea de măsură a energiei [J]. Căldura schimbată de unitatea de masă a unui sistem se numește *căldură specifică masică*, se notează cu “ q ” și are unitatea de măsură a energiei specifice masice, deci [J/kg].

În sistemul tehnic de unități de măsură, unitatea de măsură pentru căldură este *caloria* (simbolizată [cal]), definită ca fiind căldura necesară pentru a modifica temperatura unui gram de apă între 19,5°C și 20,5°C. În 1948, la A IX-a Conferință Generală de Măsuri și Greutăți, *caloria* a fost definită ca fiind exact egală cu 4,1868 J, valoare adoptată și la a V-a Conferință Internațională asupra Proprietăților Aburului din 1950 de la Londra și acceptată și în prezent.

Trebuie remarcat faptul că sintagma “*cantitate de căldură*” este de evitat, fiind un pleonasm, deoarece căldura este prin definiție o cantitate de energie.

Căldura nu este un parametru de stare. Ea nu definește starea unui sistem și nu depinde de stările extreme (inițială și finală) ale transformării suferite de sistem în timpul unui proces care are loc cu schimb de căldură, ci de modul în care se desfășoară procesul, respectiv de stările intermediare prin care trece sistemul (de *drumul transformării*). În consecință, căldura este un parametru de proces, deoarece caracterizează natura procesului și de altfel are sens numai în cazul și pe durata unui proces de interacțiune termică.

Ca orice parametru de proces, căldura nu acceptă diferențială totală. În cazul unui proces elementar, în timpul căruia un sistem interacționează termic cu un alt sistem, *căldura elementară* schimbată se notează δQ , iar *căldura elementară specifică masică* se notează δq .

Într-un proces finit, în timpul căruia sistemul suferă o transformare 1→2, căldura totală schimbată este practic egală cu suma tuturor căldurilor elementare schimbate în timpul tuturor proceselor elementare care compun procesul finit considerat și se scrie:

$$Q_{12} = \int_1^2 \delta Q \quad (3.12)$$

Spre deosebire de parametrii de proces, care pe parcursul unei transformări finite suferă o **variație** finită, căldura totală schimbată pe parcursul unui proces finit este o **cantitate** finită. Integrala din relația 3.12 are sensul unei sume infinite, iar simbolul integralei este și el diferit față de cel utilizat în cazul parametrilor de stare, având limitele de integrare notate în dreptul (sau uneori chiar la stânga) semnului integralei, nu la dreapta acestuia.

S-a constatat experimental că, în cazul unui proces elementar, căldura elementară δQ schimbată de sistem este proporțională cu masa m a sistemului și cu variația elementară a temperaturii dT , conform relației de mai jos, numită și *ecuația calorimetriei*:

$$\delta Q = m \cdot c \cdot dT \quad (3.13)$$

Constanta de proporționalitate c se numește *capacitate calorică specifică masică*, sau *capacitate termică specifică masică* (sau uneori, impropriu, *căldură specifică*), relația sa de definiție în formă diferențială și unitatea sa de măsură rezultând din ecuația calorimetriei:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \text{ sau } \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \right] \quad (3.14)$$

Unitatea de măsură a capacității calorice se poate raporta la Kelvin sau la grad Celsius deoarece la numitorul relației de definiție apare varianta elementară a temperaturii dT , adică o diferență de temperatură care are aceeași valoare atât în scara Kelvin, cât și în scara Celsius.

Se poate defini *capacitatea calorică totală* a unui sistem de masă m :

$$C = c \cdot m \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \text{ sau } \left[\frac{\text{J}}{^\circ \text{C}} \right] \quad (3.15)$$

Ca sens fizic, capacitatea calorică specifică masică reprezintă căldura pe care trebuie să o schimbe o masă unitară dintr-un anumit sistem pentru a-și modifica temperatura cu un grad Celsius, sau cu un Kelvin. Capacitatea calorică specifică masică este deci o caracteristică de material, ea având valori diferite pentru substanțe diferite. În general capacitățile calorice specifice ale materialelor nu sunt constante, ele depinzând în principal de temperatură.

Din ecuația calorimetriei se observă că, deoarece masa și capacitatea calorică specifică sunt numere pozitive, δQ are același semn cu dT . Aceasta înseamnă că dacă sistemul primește căldură, temperatura lui crește ($dT > 0$, deci $\delta Q > 0$) și invers.

3.5 Lucrul mecanic

Noțiunea de *lucru mecanic* a fost introdusă în 1826 de Poncelet pentru mărimea definită matematic în mecanică prin produsul scalar dintre vectorul forță și vectorul deplasare:

$$\delta L = d\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.16)$$

unde: δL - lucrul mecanic elementar;

$d\vec{F}$ - vectorul forță;

$d\vec{r}$ - vectorul deplasare.

Un sistem termodinamic poate interacționa mecanic, la scară microscopică, cu un alt sistem sau cu mediul exterior. Cantitatea de energie schimbată prin interacțiune mecanică se numește *lucru mecanic*, se notează cu L și are unitatea de măsură [J].

În sistemul tehnic, unitatea de măsură pentru lucrul mecanic este *kilogram forță metru* (simbolizat [kgf·m]), definit ca fiind lucrul mecanic necesar pentru a ridica cu 1 m o greutate de 1 kgf, deci un corp cu masa de 1 kg aflat în câmpul gravitațional terestru.

Ca și căldura, lucrul mecanic există numai în cadrul unui proces, deci depinde de drumul transformării, fiind un parametru de proces. *Lucrul mecanic elementar* schimbat de un sistem într-un proces elementar se notează δL . În cazul unui proces finit, în care sistemul suferă o transformare 1→2, lucrul mecanic total schimbat de sistem este suma tuturor lucrurilor mecanice elementare și se notează:

$$L_{12} = \int_1^2 \delta L \quad [\text{J}] \quad (3.17)$$

Lucrul mecanic este un parametru de proces extensiv. Se poate defini *lucrul mecanic specific masic*, ca parametru intensiv, prin raportare la masa sistemului:

$$l_{12} = \frac{L_{12}}{m} = \int_1^2 \frac{\delta L}{m} = \int_1^2 \delta l \quad (3.18)$$

În termodinamică se definesc trei tipuri diferite de lucru mecanic, în funcție tipurile sistemelor și de condițiile particulare în care are loc interacțiunea mecanică.

3.5.1 Lucrul mecanic exterior (al transformării)

Considerăm un sistem închis și izolat termic (adiabatic). Sistemul este format dintr-un gaz închis de un piston într-un cilindru (figura 3.1). Considerăm că pistonul închide etanș cilindrul, că se poate deplasa fără frecare pe oglinda cilindrului și că deplasarea pistonului se poate face cu o viteză infinit mică, deci într-un timp infinit lung. În aceste condiții, orice transformare poate fi considerată cvasistatică.

Lucrul mecanic schimbat de un sistem închis prin interacțiune mecanică cu mediul înconjurător, proces în timpul căruia sistemul suferă o transformare, se numește *lucru mecanic exterior* sau *lucru mecanic al transformării*.

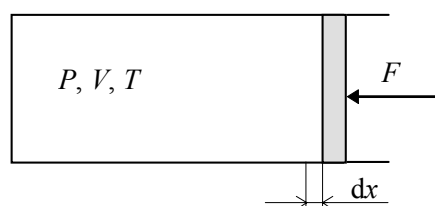


Figura 3.1: Sistem închis

Pentru a deplasa pistonul pe o distanță elementară dx în sensul comprimării gazului, asupra pistonului trebuie să acționeze din exterior o forță F . Neglijând infiniții mici de ordin superior, se poate considera că în urma acestei transformări elementare presiunea rămâne constantă, iar lucrul mecanic exterior elementar efectuat asupra sistemului este:

$$\delta L = F \cdot dx \quad (3.19)$$

Notând cu A aria suprafeței frontale a pistonului, se cunoaște din mecanică definiția presiunii ca fiind raportul dintre forță și aria suprafeței asupra căreia aceasta se exercită:

$$p = \frac{F}{A} \quad (3.20)$$

Înlocuind în relația 3.19 expresia forței rezultată din relația de definiție a presiunii și observând că produsul dintre aria suprafeței frontale a pistonului (A [m^2]) și deplasarea elementară dx reprezintă volumul elementar dV , respectiv modificarea elementară a volumului sistemului, se obține forma diferențială a relației de definiție a lucrului mecanic exterior:

$$\delta L = p \cdot A \cdot dx = p \cdot dV \quad (3.21)$$

Pentru un proces finit reversibil, în cadrul căruia sistemul suferă o transformare cvasistatică 1→2, lucrul mecanic exterior schimbat de sistem este:

$$L_{12} = \int_1^2 \delta L = \int_1^2 p \cdot dV \quad (3.22)$$

iar lucrul mecanic exterior specific masic este:

$$l_{12} = \frac{L}{m} = \int_1^2 \delta l = \int_1^2 \frac{\delta L}{m} = \int_1^2 p \cdot d\left(\frac{V}{m}\right) = \int_1^2 p \cdot dv \quad (3.23)$$

Relațiile 3.21 și 3.22 pot fi integrate numai dacă se cunoaște funcția de variație a presiunii cu volumul, deci dacă se cunoaște ecuația termică de stare a sistemului respectiv. Aceste relații pot fi integrate direct numai în cazul particular al unei transformări în timpul căreia presiunea sistemului rămâne constantă, caz în care se obține:

$$L_{12}|_{p=\text{ct.}} = \int_1^2 p \cdot dV = p \cdot (V_2 - V_1)|_{p=\text{ct.}} \quad (3.24)$$

și respectiv:

$$l_{12}|_{p=\text{ct.}} = \int_1^2 p \cdot dv = p \cdot (v_2 - v_1)|_{p=\text{ct.}} \quad (3.25)$$

Transformarea 1→2 fiind cvasistatică, aceasta poate fi reprezentată într-o diagramă p - v ca o curbă continuă (figura 3.2).

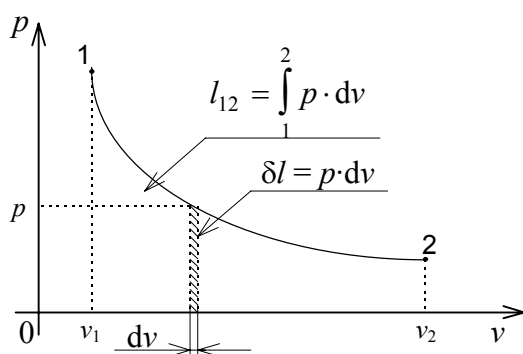


Figura 3.2: Reprezentarea lucrului mecanic exterior specific masic în diagrama p - v

Pentru o transformare elementară, lucrul mecanic exterior elementar este reprezentat în diagrama p - v de aria unui dreptunghi de lățime dv și înălțime p (constant). Lucrul mecanic exterior total este egal cu aria cuprinsă între curba transformării și abscisă (axa volumelor), respectiv aria $(v_1 l_2 v_2)$. Se poate observa grafic că dacă transformarea are loc pe un alt drum, atunci l_{12} va avea altă valoare, deci este evident că lucrul mecanic exterior depinde de drumul transformării, deci de modul în care se desfășoară procesul, fiind un parametru de proces și nu un parametru de stare. Deoarece în diagrama p - v se poate reprezenta grafic lucrul mecanic sub forma unei suprafețe, această diagramă se mai numește *diagramă mecanică*.

3.5.2 Lucrul mecanic de deplasare (de dislocare)

Considerăm un sistem termodinamic deschis și izolat adiabatic, prin care circulă un fluid fără a suferi o transformare termodinamică. Un exemplu este prezentat în figura 3.3 și anume o conductă cilindrică cu pereți adiabatici de secțiune constantă, prin care curge un fluid. Sistemul este delimitat de două frontiere imaginare (secțiunile transversale 1-1 și 2-2) și o frontieră reală (peretele interior al conductei între aceste secțiuni). Considerăm că curgerea are loc fără frecare și fără schimb de căldură cu mediul înconjurător, deci sistemul nu suferă o transformare termodinamică.

Pentru a înlocui toată cantitate de fluid aflată în volumul de control la un moment dat, stratul de fluid aflat pe secțiunea 1-1 (în afara sistemului considerat) trebuie să se deplaseze până în secțiunea 2-2, deci pe distanța x . Se poate considera că, pentru a se putea deplasa, fluidul din amonte acționează ca un piston asupra celui din aval.

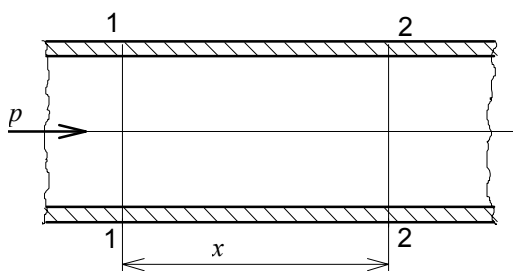


Figura 3.3: Sistem deschis

În concluzie, lucrul mecanic consumat pentru deplasarea masei de fluid aflate la un moment dat într-un sistem deschis, numit *lucru mecanic de deplasare* sau *lucru mecanic de dislocare* și notat L_d , este:

$$L_d = F \cdot x = p \cdot A \cdot x = p \cdot V \quad [\text{J}]$$

iar pentru o masă unitară (*lucrul mecanic de deplasare specific masic*):

$$l_d = L/m = p \cdot v \quad [\text{J/kg}]$$

Formele diferențiale ale relațiilor de definiție rezultă evident din relațiile 3.26 și 3.27:

$$\delta L_d = d(p \cdot V) = p \cdot dV + V \cdot dp \quad (3.28)$$

$$\delta l_d = d(p \cdot v) = p \cdot dv + v \cdot dp \quad (3.29)$$

Fiind produsul a doi parametri de stare (p și V , respectiv v), lucrul mecanic de deplasare are expresia matematică a unui parametru de stare. Ca sens fizic, lucrul mecanic de deplasare este un parametru de stare numai în cazul în care reprezintă cantitatea de energie introdusă cu unitatea de masă de substanță în sistem (când se numește *lucru mecanic de admisie* și se notează l_{ad}) și respectiv evacuată cu unitatea de masă de substanță din sistem (când se numește *lucru mecanic de evacuare* și se notează l_{ev}).

3.5.3 Lucrul mecanic tehnic

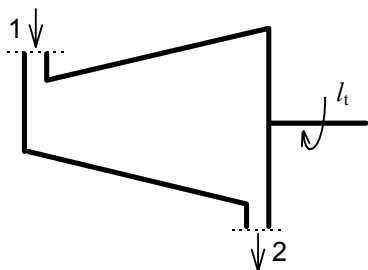


Figura 3.4: Sistem deschis în care fluidul de lucru suferă o transformare

Considerăm un sistem termodinamic deschis prin care curge un fluid. Sistemul este izolat adiabatic, iar fluidul de lucru suferă în interiorul sistemului o transformare din starea 1, cu care intră în sistem, până în starea 2, cu care iese din sistem. Multe din mașinile termice utilizate în practică sunt sisteme de acest tip. Ca exemplu, în figura 3.4 este reprezentată o mașină termică motoare și anume o turbină.

În turbină intră un fluid cu starea 1 (p_1, v_1, T_1), care curge printre paletetele turbinei și se destinde, ieșind cu starea 2 (p_2, v_2, T_2). În general $p_2 < p_1$ și $v_2 > v_1$. În interiorul turbinei, fiecare unitate de masă de fluid de lucru produce un lucrul mecanic exterior (l_{12}) și consumă un lucru mecanic de deplasare (l_{d12}) pentru a curge prin turbină de la secțiunea de intrare până la secțiunea de ieșire.

Lucrul mecanic utilizabil în afara sistemului, sau lucrul mecanic furnizat la arborele turbinei, se numește *lucru mecanic tehnic*, se notează cu L_t și are unitatea de măsură [J]. Lucrul mecanic furnizat la arborele turbinei de unitatea de masă de fluid de lucru se numește *lucru mecanic tehnic specific masic*, se notează cu l_t și are unitatea de măsură [J/kg].

Considerăm un proces elementar prin care trece o masă unitară de fluid de lucru în interiorul mașinii. Prin destindere, fluidul de lucru produce lucrul mecanic exterior specific elementar δl . Din acesta, o parte este consumat pentru deplasarea în interiorul mașinii sub formă de lucru mecanic de deplasare specific elementar δl_d . Suma algebrică a acestora este lucrul mecanic tehnic elementar specific disponibil la arborele mașinii δl_t . Utilizând relațiile de definiție 3.21 și 3.29, rezultă:

$$\delta l_t = \delta l - \delta l_d = p \cdot dv - d(p \cdot v) = p \cdot dv - p \cdot dv - v \cdot dp$$

Astfel, forma diferențială a relației de definiție a lucrului mecanic tehnic specific este:

$$\delta l_t = -v \cdot dp \quad (3.30)$$

Pentru procesul finit între stările 1 și 2 lucrul mecanic tehnic specific masic furnizat la arborele turbinei de unitatea de masă de fluid de lucru este :

$$l_{t12} = \int_1^2 \delta l = - \int_1^2 v \cdot dp \quad (3.31)$$

Relația 3.31 poate fi integrată numai dacă se cunoaște funcția de variația a volumului specific cu presiunea, deci dacă se cunoaște ecuația termică de stare a fluidului de lucru. Ea poate fi integrată direct numai în cazul particular când volumul specific rămâne constant, adică:

$$l_{t12}|_{v=ct.} = - \int_1^2 v \cdot dp = -v \cdot (p_2 - p_1)|_{v=ct.} = v \cdot (p_1 - p_2)|_{v=ct.} \quad (3.32)$$

Se mai observă că:

$$l_{t12} = \int_1^2 \delta l - \int_1^2 \delta l_d = \int_1^2 p \cdot dv - \int_1^2 d(p \cdot v) = l_{12} - (p_2 \cdot v_2 - p_1 \cdot v_1) \quad (3.33)$$

Transformarea 1→2 fiind cvasistatică, aceasta poate fi reprezentată într-o diagramă $p-v$ ca o curbă continuă (figura 3.5). Pentru o transformare elementară, lucrul mecanic tehnic elementar este reprezenta în diagrama $p-v$ de aria unui dreptunghi de lățime dp și înălțime v (constant). Lucrul mecanic tehnic specific total schimbat în transformarea 1→2 este egal cu aria cuprinsă între curba transformării și ordonată (axa presiunilor), respectiv aria ($p_1 1 2 p_2$). Se poate observa grafic că dacă transformarea are loc pe un alt drum, atunci l_{t12} va avea altă valoare, deci este evident că și lucrul mecanic tehnic depinde de drumul transformării, fiind un parametru de proces.

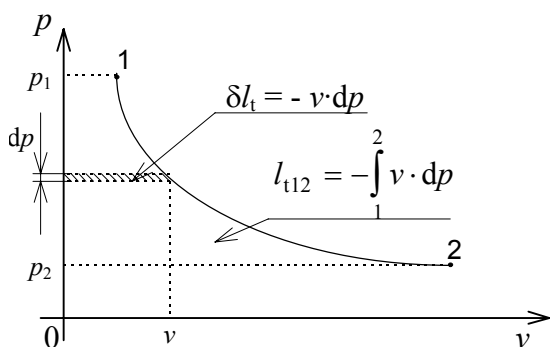


Figura 3.5: Reprezentarea lucrului mecanic tehnic specific masic în diagrama $p-v$

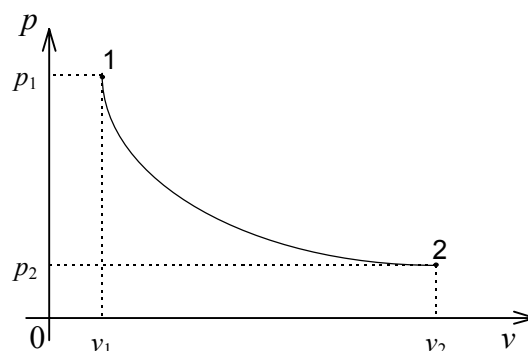


Figura 3.6: Reprezentarea grafică a lucrurilor mecanice specifice masice în diagrama $p-v$

În diagrama $p-v$ din figura 3.6 sunt reprezentate toate lucrurile mecanice specifice din relația 3.33 pentru o transformare finită 1→2. La $l_{12} = \text{aria } (v_1 1 2 v_2)$ se adaugă dreptunghiul $p_1 \cdot v_1 = \text{aria } (0 p_1 v_1 0)$ și se scade dreptunghiul $p_2 \cdot v_2 = \text{aria } (0 p_2 v_2 0)$, obținându-se astfel $l_{t12} = \text{aria } (p_1 1 2 p_2)$.

3.6 Enunțuri ale principiului întâi al termodinamicii

Principiul întâi al termodinamicii a fost enunțat pentru prima oară în 1832 de către Nicolas Sadi Carnot sub forma echivalenței dintre căldură și lucru mecanic. Lucrarea sa a fost însă publicată postum abia în 1882, când principiul întâi al termodinamicii era deja recunoscut ca lege fundamentală a naturii.

În 1842 Julius Robert Mayer publică pentru prima oară în mod explicit primul principiu al termodinamicii tot ca echivalență între căldură și lucru mecanic ca forme de transmitere a energiei și ridică la rang de lege generală a proceselor termice *legea conservării forței vii* din mecanică. În 1847 H. von Helmholtz a enunțat pentru prima oară *legea generală a conservării energiei*.

În 1865 Rudolf Clausius a reformulat (și numerotat) principiile întâi și al doilea ale termodinamicii, dând principiului întâi celebrul enunț: “*Energia universului este constantă*”.

Prima formulare, restrânsă, a fost specifică sistemului tehnic de unități de măsură și afirma că întotdeauna căldura are un echivalent unic în lucrul mecanic, acestea putându-se transforma reciproc din una în alta conform unei relații de echivalență de forma :

$$Q[\text{ kcal}] = A \cdot L [\text{ kgf} \cdot \text{ m}] \quad (3.34)$$

Pentru o lungă perioadă de timp, problema principală a constat în determinarea experimentală a raportului de echivalență, respectiv a constantei A. Valoarea acceptată astăzi este $A = 427 \text{ kcal/kgf} \cdot \text{ m}$. Atunci relația de echivalență dintre unitățile de măsură este:

$$1 \text{ kcal} = 427 \text{ kgf} \cdot \text{ m} = 427 \cdot 9,80665 \text{ N} \cdot \text{ m} = 4186,8 \text{ J} \quad (3.35)$$

O enunțare generală a principiului întâi al termodinamicii care exprimă conservarea energiei este: “*Energia unui sistem termodinamic izolat este constantă*”. De aici se poate ajunge la formularea specifică termotehnicii și anume: “*Un perpetuum mobile de speța (sau de ordinul) întâi este imposibil*”, adică nu poate exista o mașină termică motoare care să producă o anumită formă de energie fără a consuma o cantitate egală din alte forme de energie.

În 1900 Max Planck, studiind radiația electromagnetică a corpului negru, introduce *cuantificarea energiei*, demonstrând că energia nu poate varia continuu, ci doar discret, în multipli de *cuante de energie* “ ϵ ” ($\epsilon = h \cdot \nu$, respectiv energia fotonului). În 1902 Gibbs a publicat *Mecanica statistică*, aceasta fiind și în prezent baza *statisticii cuantice*. S-a produs astfel prima revoluție în fizică și mai ales în *principiul conservării energiei*. Aceasta a fost urmată la scurt timp, în 1905, de o a doua revoluție, cauzată de *Teoriei relativității restrânse* elaborată de Albert Einstein, în cadrul căreia *principiul conservării energiei* a fost unit cu *principiul conservării masei*, pe baza celebrei relații de echivalență între masă și energie:

$$E = m \cdot c^2 \quad (3.36)$$

unde: $c = (2,99776 \pm 0,00004) \cdot 10^8 \text{ m/s}$ - viteza luminii în vid.

La vitezele utilizate în practică, neglijabile în comparație cu viteza luminii, efectele relativiste sunt neglijabile, masa rămâne practic constantă, deci *principiul conservării energiei* este valabil (ca un caz particular).

3.7 Explicarea matematică a principiului I al termodinamicii pentru sisteme închise

Consideră un sistem termodinamic închis oarecare. Conform principiului întâi, dacă sistemul este izolat, deci dacă nu schimbă energie prin nici un tip de interacțiune, atunci energia

lui internă rămâne constantă, adică variația acesteia este nulă atât pentru un proces elementar, cât și pentru un proces finit. Aceste afirmații se exprimă matematic prin relațiile:

$$U = \text{const.} \Leftrightarrow dU = 0 \Leftrightarrow \Delta U = 0 \quad (3.37)$$

Un sistem închis dar neizolat poate schimba energie cu mediul înconjurător prin mai multe tipuri de interacțiuni, dintre care în cadrul termodinamicii se studiază în principal cele termice și mecanice. Cantitățile de energie primite sau cedate sub formă de căldură și lucrul mecanic produc modificarea energiei interne a sistemului. Pentru exprimarea matematică a tuturor cazurilor posibile ar fi necesare patru relații matematice, care să evidențieze faptul că sistemul primește sau cedează căldură și lucru mecanic respectiv toate variantele posibile din relația:

$$\Delta U = \pm Q \pm L$$

Studiind însă relațiile de definiție, se constată că atât căldura, cât și lucrul mecanic nu sunt întotdeauna cantități pozitive, ci pot avea și valori negative.

Din ecuația calorimetriei (3.13) se observă că dacă un sistem primește căldură și temperatura sa crește ($dT > 0$), atunci căldura are valoare pozitivă ($\delta Q > 0$), deoarece masa și capacitatea calorică specifică pot avea numai valori pozitive. Dacă sistemul cedează căldură și temperatura sa scade ($dT < 0$), atunci căldura are valoare negativă ($\delta Q < 0$).

Din relația de definiție a lucrului mecanic exterior (3.21) se observă că acesta este pozitiv ($\delta L > 0$) atunci când sistemul se destinde și volumul său crește ($dV > 0$), deci atunci când sistemul efectuează lucru mecanic asupra mediului ambiant, adică atunci când sistemul cedează o parte din energia sa internă mediului ambiant sub formă de lucru mecanic. Dacă mediul ambiant efectuează lucru mecanic asupra sistemului, producând comprimarea acestuia, deci scăderea volumului ($dV < 0$), atunci lucrul mecanic exterior are valoare negativă ($\delta L < 0$). Analog, din relația de definiție a lucrului mecanic tehnic (3.30) se observă că și acesta este pozitiv atunci când este efectuat de sistem asupra mediului ambiant și este negativ atunci când este efectuat de mediul ambiant asupra sistemului.

Ținând cont de semnele căldurii și lucrului mecanic, pentru o transformare finită 1→2 în timpul căreia un sistem schimbă cu mediul ambiant căldura Q_{12} și lucrul mecanic exterior L_{12} , principiul întâi se poate exprima matematic printr-o singură relație și anume:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} - L_{12} \quad [\text{J}] \quad (3.38)$$

Scrisă în această formă, relația 3.38 evidențiază clar faptul că variația parametrului de stare energie internă este cauzată de parametrii de proces căldură și lucru mecanic.

Ca parametri intensivi, respectiv pentru o masă unitară, se poate scrie:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = q_{12} - l_{12} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3.39)$$

Pentru un proces elementar, în timpul căruia unitatea de masă a sistemului schimbă căldura elementară specifică δq și lucrul mecanic specific elementar δl , variația elementară a energiei interne specifice este:

$$du = \delta q - \delta l = \delta q - p \cdot dv \quad (3.40)$$

Din relația de definiție a entalpiei în formă diferențială, respectiv:

$$di = du + d(p \cdot v) = du + p \cdot dv + v \cdot dp$$

înlocuind variația elementară a energiei interne specifice (du) din relația 3.40, rezultă:

$$di = \delta q - p \cdot dv + p \cdot dv + v \cdot dp$$

deci, cu relația de definiție a lucrului mecanic tehnic elementar (3.30):

$$di = \delta q + v \cdot dp = \delta q - \delta l_t \quad (3.41)$$

Pentru o transformare finită 1→2 forma integrală a relației 3.41 este:

$$\Delta i = i_2 - i_1 = q_{12} - l_{t12} \quad (3.42)$$

În cazul în care în timpul procesului apar pierderi datorate forțelor de frecare, o parte din energia internă va fi consumată sub formă de lucru mecanic de frecare (pentru masă unitară lucru mecanic de frecare specific masic l_f). Lucru mecanic de frecare reprezintă întotdeauna o pierdere pentru sistem (indiferent de sensul în care acesta schimbă energie prin alte tipuri de interacțiuni) și în final este disipat sub formă de căldură în mediul ambiant. Formele diferențiale și integrale ale expresiilor matematice ale principiului întâi în mărimi intensive devin:

$$du = \delta q - \delta l - |\delta l_f| \quad (3.43)$$

$$di = \delta q - \delta l_t - |\delta l_f| \quad (3.44)$$

$$\Delta u = u_2 - u_1 = q_{12} - l_{12} - |l_{f12}| \quad (3.45)$$

$$\Delta i = i_2 - i_1 = q_{12} - l_{t12} - |l_{f12}| \quad (3.46)$$

3.8 Explicarea matematică a principiului I al termodinamicii pentru sisteme deschise

Considerăm un sistem deschis alcătuit dintr-o mașină termică motoare, de exemplu o turbină (figura 3.7), în care se destinde o masă unitară de fluid de lucru.

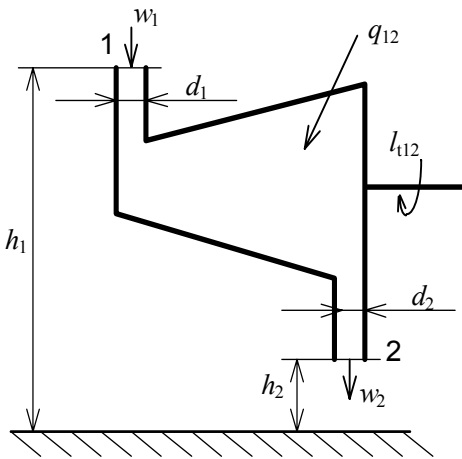


Figura 3.7: Mașină termică funcționând ca sistem deschis

Turbina este alimentată la înălțimea h_1 cu fluid de lucru cu starea 1 (p_1, v_1, T_1), care curge cu viteza w_1 prin conducta de admisie cu diametrul d_1 . În interiorul turbinei, fluidul de lucru se destinde până la starea 2 (p_2, v_2, T_2), cu care este evacuat cu viteza w_2 prin conducta de evacuare cu diametrul d_2 și părăsește sistemul la înălțimea h_2 . În timpul destinderii în turbină, fluidul de lucru produce la arbore lucrul mecanic tehnic l_{t12} și mai poate primi căldura q_{12} .

Conform principiului întâi al termodinamicii, cantitățile de energie schimbate cu mediul ambiant prin diferite tipuri de interacțiuni produc modificarea energiei sistemului. Energia totală a fluidului de lucru într-o stare oarecare este compusă din energia cinetică (e_c), energia potențială (e_p), energia internă (u) și toate celelalte forme de energie care nu se modifică (e_0), deci pentru unitatea de masă:

$$e = \frac{w^2}{2} + g \cdot h + u + e_0 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

Variația energiei totale specifice (Δe) între stările 1 și 2 este dată de variația energiei cinetice, a energiei potențiale și a energiei interne. Toate celelalte forme de energie a căror sumă este e_0 rămân constante:

$$\Delta e = e_2 - e_1 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g \cdot (h_2 - h_1) + (u_2 - u_1) \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3.47)$$

Variația energiei specifice (parametru de stare) este cauzată de schimbul de energie cu mediul ambiant prin interacțiune termică și mecanică, deci de cantitățile de energie schimbate sub formă de căldură și lucrul mecanic (parametri de proces). Sistemul schimbă căldura q_{12} produce la arborele mașinii lucrul mecanic tehnic l_{t12} . În plus, el primește energie asociată cu fiecare kilogram de fluid de lucru introdus în sistem sub forma unui lucru mecanic de admisie (l_{ad}) și consumă un lucru mecanic de deplasare pentru evacuarea fluidului din sistem, numit lucru mecanic de evacuare (l_{ev}), pierzând practic energia conținută de fiecare kilogram de fluid de lucru evacuat.

$$\Delta e = q_{12} - l_{t12} + l_{ad} - l_{ev} = q_{12} - l_{t12} + p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (3.48)$$

Egalând relațiile 3.47 și 3.48, rezultă:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g \cdot (h_2 - h_1) + (u_2 - u_1) = q_{12} - l_{t12} + (p_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot v_2)$$

Separând parametrii de stare de parametrii de proces și grupând convenabil termenii:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g \cdot (h_2 - h_1) + \underbrace{(u_2 + p_2 \cdot v_2)}_{i_2} - \underbrace{(u_1 + p_1 \cdot v_1)}_{i_1} = q_{12} - l_{t12}$$

Remarcând apariția relațiilor de definiție ale entalpiei și utilizând această notație, se obține expresia matematică a principiului întâi în forma integrală:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g \cdot (h_2 - h_1) + (i_2 - i_1) = q_{12} - l_{t12} \quad (3.49)$$

În multe cazuri întâlnite în practică, variațiile energiei cinetice și potențiale sunt neglijabile în raport cu variația entalpiei. În plus, pentru învingerea forțelor de frecare în timpul funcționării se consumă un lucru mecanic de frecare. În aceste condiții, forma integrală a expresiei matematice a principiului întâi al termodinamicii devine:

$$\Delta i = i_2 - i_1 = q_{12} - l_{t12} - |l_{f12}| \quad (3.50)$$

Formele diferențiale ale relațiilor 3.49 și 3.50 sunt, evident:

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) + g \cdot dh + di = \delta q - \delta l_t \quad (3.51)$$

$$di = \delta q - \delta l_t - |\delta l_f| \quad (3.52)$$

3.9 Forma generală a ecuațiilor calorice de stare

Prin convenție, energia internă și entalpia se numesc parametri calorici de stare, ambii având unitatea de măsură a energiei și variația lor fiind provocată de schimbul de energie cu mediul ambiant. Fiind parametri de stare, conform postulatului de stare, pot fi exprimați în funcție de doi parametri de stare independenți. O relație funcțională între un parametru caloric de stare și doi parametri termici de stare independenți se numește *ecuație calorică de stare*. În general energia internă se exprimă în funcție de volum și temperatură, iar entalpia în funcție de presiune și temperatură. Ca parametri intensivi, cele două ecuații calorice de stare utilizate de obicei sunt:

$$\begin{cases} u = u(v, T) \\ i = i(p, T) \end{cases} \quad (3.53)$$

Deoarece toți parametrii din ecuațiile calorice de stare sunt parametri de stare, aceștia acceptă diferențială totală. Ecuațiile calorice de stare pot fi atunci scrise sub forma diferențială:

$$\begin{cases} du = \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \cdot dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \cdot dT \\ di = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T \cdot dp + \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \cdot dT \end{cases} \quad (3.54)$$

Dacă o masă unitară dintr-un sistem oarecare suferă o transformare la volum constant, conform principiului întâi al termodinamicii căldura schimbată într-un proces elementar este:

$$\delta q = du + \delta l = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \cdot dT + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] \cdot dv$$

Transformarea având loc la volum constant, $dv = 0$ și rezultă:

$$\delta q = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \cdot dT = c_v \cdot dT$$

Prin definiție variația energiei interne în raport cu temperatura la volum constant se notează c_v și se numește capacitate calorică specifică masică la volum constant:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad \text{sau} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \right] \quad (3.55)$$

Analog, în cazul unei transformări la presiune constantă:

$$\delta q = di + \delta l_t = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \cdot dT + \left[\left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T - v \right] \cdot dp = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \cdot dT = c_p \cdot dT$$

Prin definiție, variația entalpiei în raport cu temperatura la presiunea constantă se notează c_p și se numește capacitate calorică specifică masică la presiune constantă:

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad \text{sau} \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}} \right] \quad (3.56)$$

În cazul lichidelor și solidelor, datorită incompresibilității, nu există o diferență între c_v și c_p și se consideră o singură capacitate calorică specifică masică, notată c .

AL DOILEA PRINCIPIU AL TERMODINAMICII

5.1 Introducere

Conform celor arătate anterior în capitolul 3, principiul întâi al termodinamicii este o lege cantitativă, generalizată sub forme legii conservării energiei (sau a energiei și masei, în teoria relativității). Această lege permite conversia liberă a oricărei forme de energie (internă, mecanică, electrică, magnetică etc.) în orice altă formă de energie, cu singura condiție ca variația energiei unui sistem să fie egală cu diferența dintre cantitatea de energie primită și cea cedată, indiferent de tipul de interacțiuni prin care are loc schimbul de energie. Fiind o lege cantitativă, principiul întâi al termodinamicii este exprimat matematic prin relații de egalitate.

Exemple de procese reale care confirmă principiul întâi al termodinamicii se cunosc din experiența comună: transformarea energiei electrice în căldură într-un conductor electric cu rezistență finită, transformarea energiei mecanice în energie internă prin mișcarea unui rotor paletat în interiorul unui fluid, atingerea echilibrului termic prin schimb de căldură între două sisteme de temperaturi diferite aflate în contact termic etc.

Tot din experiența comună se constată însă că există un sens preferențial în care se desfășoară spontan unele procese. Dacă două sisteme aflate în contact termic au aceeași temperatură, nu este de așteptat ca, după un timp oricât de lung, unul dintre ele să se răcească de la sine cedând căldură celui alt sistem, care să se încălzească. Transformarea energiei mecanice în energie internă se poate realiza prin căderea liberă a unui corp care își cedează energia potențială, prin intermediul unui fir înfășurat pe un tambur, axului rotorului paletat. Prin frecarea paletelor cu particulele fluidului lucrul mecanic se transformă în căldură și duce la creșterea energiei interne a fluidului. Nici în acest caz nu este însă de așteptat ca, după un timp oricât de lung, energia internă a fluidului să se transforme spontan în energie mecanică și prin răcirea fluidului să se ridice de la sine corpul care anterior a căzut liber. Aceste două exemple, care nu contrazic principiul întâi al termodinamicii, sunt suficiente pentru a arăta că acesta, cu toate că este necesar în studiul termodinamicii, nu este și suficient pentru a explica procesele reale observate în natură.

În plus, se poate constata empiric că între diferitele forme de energie există diferențe calitative. Energia mecanică și energia electrică se pot transforma în energie internă transmisă sub formă de căldură, prin frecare și respectiv prin trecerea printr-un conductor electric cu rezistență finită. După cum se va vedea însă în subcapitolele următoare, energia internă primită sub formă de căldură de către un sistem nu poate fi transformată integral în energie mecanică transmisă sub formă de lucru mecanic, o parte din ea trebuind să fie cedată mediului ambiant.

Se constată astfel că este necesară definirea unei alte legi, care să poată caracteriza sensul preferențial de desfășurare spontană a unor procese reale și care să poată evidenția și chiar măsura diferențele calitative dintre diferitele forme de energie, această lege fiind de fapt principiul al doilea al termodinamicii.

Fiind o lege calitativă, principiul al doilea al termodinamicii va fi exprimat matematic prin relații de inegalitate. Pentru scrierea acestor relații și pentru studiul principiului al doilea este necesară definirea unui nou parametru de stare numit *entropie*, introdus de Clausius în anul 1854 (și denumit tot de acesta entropie abia în 1965).

Istoria principiului al doilea începe cu lucrarea publicată de Carnot în 1824, printre cei mai importanți oameni de știință care au contribuit ulterior la studiul acestuia numărându-se Clausius, Kelvin, Gibbs, Maxwell, Boltzmann, Planck, Poincaré, Carathéodory și Born).

5.2 Procese ciclice. Surse de căldură

Un proces termodinamic în timpul căruia un sistem, plecând dintr-o stare inițială, suferă mai multe transformări în urma cărora revine în starea de echilibru inițială fără să treacă de două ori printr-o aceeași stare intermediară, se numește *proces ciclic*. Reprezentarea grafică într-o diagramă plană a transformărilor cvasistatice care compun un proces ciclic se numește *ciclu termodinamic*. În figura 5.1 este reprezentat un proces ciclic oarecare în diagrama $p-v$.

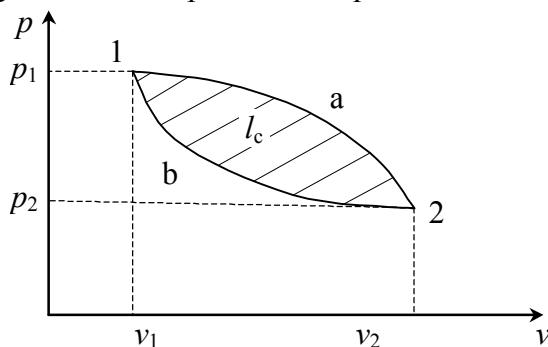


Figura 5.1: Ciclu termodinamic oarecare în diagrama $p-v$

Considerăm un sistem oarecare (pentru care este valabilă diagrama $p-v$ din figura 5.1) aflat inițial în starea 1, care suferă o transformare cvasistatică pe drumul a (notată $1 \rightarrow a \rightarrow 2$) în urma căreia ajunge în starea 2, după care revine în starea inițială 1 printr-o altă transformare, pe drumul b (notată $2 \rightarrow b \rightarrow 1$). Curbele celor două transformări care compun procesul ciclic formează astfel în diagrama $p-v$ un contur închis ($1a2b1$). Starea inițială de echilibru 1 a sistemului considerat este caracterizată de anumite valori ale parametrilor de stare. Când sistemul revine în starea inițială 1, toți parametrii de stare revin la valorile corespunzătoare acestei stări, indiferent de stările intermediare prin care a trecut sistemul pe parcursul procesului ciclic. Aceasta înseamnă că variația totală a oricărui parametru de stare în urma parcurgerii unui proces ciclic (care prin definiție formează un contur închis) este nulă, adică integrala curbilinie pe un contur închis a oricărui parametru de stare este nulă (una dintre proprietățile parametrilor de stare), adică:

$$\oint dp = \oint dv = \oint dT = \oint du = \oint di = 0 \quad (5.1)$$

Conform celor prezentate anterior (vezi cap. 3), lucrul mecanic fiind un parametru de proces, valorile sale pe parcursul transformărilor cvasistatice depind de drumul transformărilor. Aceste mărimi se pot reprezenta grafic în diagrama $p-v$ pentru lucrul mecanic exterior, tehnic și de deplasare. Căldura fiind de asemenea un parametru de proces, depinde și ea de drumul transformării și poate fi reprezentată grafic, dar într-o altă diagramă ($T-s$), care va fi studiată în unul din subcapitolele următoare, după definirea entropiei.

Dacă transformarea directă $1 \rightarrow 2$ are loc pe drumul (a) și transformarea inversă $2 \rightarrow 1$ are loc tot pe drumul (a), atunci este evident că lucrul mecanic tehnic specific l_{1a2} produs la transformarea directă $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ este egal cu l_{2a1} , consumat la transformarea inversă $2 \rightarrow a \rightarrow 1$, presupunând ambele transformări cvasistatice și desfășurare într-un proces reversibil. În acest caz însă nu se poate vorbi despre un proces ciclic, deoarece sistemul trece de două ori nu numai prin una, ci prin toate stările intermediare.

Pentru ca un sistem să primească la transformarea directă un lucru mecanic mai mare decât cel consumat la transformarea inversă, pe care să îl poată furniza ciclic unui consumator exterior, transformarea inversă trebuie să aibă loc pe un alt drum, de exemplu pe drumul b, deci trebuie ca sistemul să parcurgă un proces ciclic. În cazul din figura 5.1, lucrul mecanic tehnic specific l_{1a2} produs la transformarea directă $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ este mai mare decât l_{2b1} , consumat la

transformarea inversă $2 \rightarrow b \rightarrow 1$. Suma algebrică a lucrurilor mecanice tehnice schimbate pe parcursul transformărilor care compun ciclul se numește *lucru mecanic ciclic* sau *lucru mecanic al ciclului* și se notează l_c . Pentru cazul reprezentat în figura 5.1, se poate scrie:

$$l_c = l_{t1a2} - l_{t2b1} \quad (5.2)$$

Pe baza principiului I al termodinamicii se poate demonstra că lucrul mecanic al ciclului este egal și cu suma tuturor lucrurilor mecanice exterioare schimbate pe parcursul întregului proces ciclic, precum și cu suma tuturor căldurilor schimbate pe parcursul întregului proces ciclic. Forma diferențială a expresiilor matematice ale principiului întâi:

$$du = \delta q - \delta l$$

$$di = \delta q - \delta l_t,$$

considerând procesul ciclic ca o sumă infinită de procese elementare și ținând cont de proprietatea parametrilor de stare exprimată prin relația 5.1, rezultă prin integrare pe conturul închis de ciclu:

$$\oint du = \oint \delta q - \oint \delta l = 0$$

$$\oint di = \oint \delta q - \oint \delta l_t = 0,$$

de unde rezultă imediat că:

$$\oint \delta q = \oint \delta l = \oint \delta l_t = l_c \quad (5.3)$$

Ciclurile termodinamice teoretice studiate pentru a fi utilizate în practică sunt în general compuse dintr-un număr finit și relativ mic de transformări simple. Putem atunci descompune integralele pe contur închis ale parametrilor de proces din relația 5.3, care au sensul unor sume infinite de cantități elementare pentru tot procesul ciclic, în integralele definite corespunzătoare transformărilor simple care compun ciclul. Considerând ciclul oarecare din figura 5.1 ca fiind compus din două transformări simple (directă $1 \rightarrow a \rightarrow 2$ și inversă $2 \rightarrow b \rightarrow 1$), rezultă:

$$\int_1^{2(a)} \delta q + \int_2^{1(b)} \delta q = \int_1^{2(a)} \delta l + \int_2^{1(b)} \delta l = \int_1^{2(a)} \delta l_t + \int_2^{1(b)} \delta l_t \quad (5.4)$$

În lucrarea sa publicată în 1824, Carnot a arătat că, pentru a putea parcurge un proces ciclic, un sistem termodinamic trebuie să schimbe căldură cu cel puțin două surse de căldură de temperaturi diferite (afirmație considerată ulterior ca prima enunțare a principiului al doilea al termodinamicii). Sursa de căldură cu temperatură mai mare se numește *sursă caldă* și prin convenție temperatura sa se notează în general cu " T ". Sursa de căldură cu temperatură mai mică se numește *sursă rece* și temperatura sa se notează cu " T_0 ". Căldura schimbată cu sursa caldă se notează cu " Q ", iar căldura specifică schimbată de unitatea de masa se notează cu " q ". Căldura schimbată cu sursa rece se notează cu " Q_0 ", iar căldura specifică schimbată de unitatea de masa se notează cu " q_0 ". Cu aceste notații, forma integrală a relației 5.4 se scrie, tot pentru ciclul oarecare din figura 5.1:

$$q + q_0 = l_{1a2} + l_{2b1} = l_{t1a2} + l_{t2b1} = l_c \quad (5.5)$$

Căldurile și lucrurile mecanice schimbate pe parcursul transformărilor care compun procesul ciclic pot fi pozitive sau negative (conform convenției de semne stabilite în cadrul capitulului 3), sumele din relația 5.5 fiind sume algebrice.

5.3 Mașini termice motoare și generatoare

O instalație construită astfel încât în interiorul său un anumit sistem parcurge un proces ciclic se numește *mașină termică*. Sistemele utilizate în mașinile termice sunt în general fluid și se numesc *fluide de lucru* sau *agenți termici*. Fluidele de lucru sunt lichide sau gaze, în unele mașini termice putând să aibă loc și schimbări ale stării de agregare (procese de vaporizare și condensare).

Un ciclu termodinamic este reprezentat grafic în diagrama $p-v$ ca un contur închis, deci sistemul nu trece de două ori prin aceeași stare. În cazul în care fluidul de lucru parcurge ciclul în sens orar (de exemplu în cazul ciclului oarecare din figura 5.1 pe drumul 1a2b1) ciclul se numește *ciclu motor*. O mașină termică în care fluidul de lucru evoluează după un ciclu motor se numește *mașină termică motoare* sau *motor termic*.

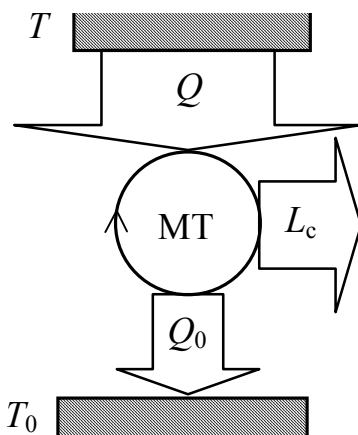


Figura 5.2: Mașină termică motoare (motor termic)

O mașină termică motoare este reprezentată schematic în figura 5.2. Cercul din mijloc (notat MT de la denumirea de motor termic) reprezintă schematic ciclul termodinamic, sensul (orar) de parcurgere a acestuia fiind simbolizat prin săgeata din partea stângă. Pe parcursul unui ciclu, fluidul de lucru preia căldura Q de la sursa caldă cu temperatura T . O parte din aceasta este transformată în lucrul mecanic ciclic L_c , iar cealaltă parte (Q_0) este cedată sursei reci cu temperatura $T_0 < T$ (fapt simbolizat prin poziționarea sursei reci sub sursa caldă).

Conform principiului I al termodinamicii, deoarece la sfârșitul unui ciclu sistemul revine în starea inițială, rezultă că și energia internă revine la valoarea corespunzătoare acestei stări. Atunci este evident că se poate scrie următoarea relație între cantitățile de energie schimbate sub formă de căldură și lucru mecanic pe parcursul unui ciclu:

$$L_c = Q - |Q_0| = Q + Q_0 \quad (5.6)$$

Scrierea explicită “ $-|Q_0|$ ” se utilizează numai pentru a evidenția faptul că mașina termică motoare cedează căldură sursei reci, deci aceasta are valoare negativă.

Mașinile termice motoare se utilizează pentru transformarea energiei termice consumate (căldura preluată de la sursa caldă) în energie mecanică utilă (lucrul mecanic ciclic furnizat la arborele mașinii). Se poate atunci defini *randamentul termic* al mașinii termice motoare (notat “ η_t ”) ca raportul dintre ceea ce este util (L_c) și ceea ce este consumat (Q), adică:

$$\eta_t = \frac{L_c}{Q} = \frac{L}{Q} = \frac{Q - |Q_0|}{Q} = 1 - \frac{|Q_0|}{Q} \quad (5.7)$$

Atunci când este evident că este vorba despre un proces ciclic se poate renunța la notarea explicită cu indicele “c” a lucrului mecanic ciclic, după cum se vede în relația 5.7.

Randamentul termic se poate exprima și în funcție de parametrii intensivi de proces (pentru o masă unitară de fluid de lucru), precum și în funcție de puterea furnizată la arborele motorului termic și fluxul de căldură preluat de la sursa caldă, respectiv:

$$\eta_t = \frac{l_c}{q} = \frac{l}{q} = \frac{q - |q_0|}{q} = 1 - \frac{|q_0|}{q} \quad (5.8)$$

$$\eta_t = \frac{P}{\dot{Q}} = \frac{P}{\dot{Q}} = \frac{\dot{Q} - |\dot{Q}_0|}{\dot{Q}} = 1 - \frac{|\dot{Q}_0|}{\dot{Q}} \quad (5.9)$$

Un ciclu termodinamic poate fi parcurs de fluidul de lucru și în sens trigonometric, caz în care se numește *ciclu generator*. O instalație în care fluidul de lucru parcurge un ciclu generator se numește *mașină termică generatoare*. Aceasta extrage căldură de la sursa rece și cedează căldură sursei calde. Pentru a putea funcționa, unei mașini termice generatoare trebuie să i se furnizeze din exterior lucru mecanic. Conform principiului I al termodinamicii, căldura Q cedată sursei calde este egală (în valoare absolută) cu suma dintre căldura Q_0 extrasă de la sursa rece și lucrul mecanic L furnizat la arborele mașinii. După scopul în care sunt utilizate, mașinile termice generatoare sunt de două tipuri: *pompe de căldură* și *mașini frigorifice*.

Pompele de căldură sunt utilizată pentru a prelua căldură de la o sursă cu temperatură prea mică pentru a mai putea fi utilizată în scopuri practice și a o ceda, împreună cu lucrul mecanic furnizat la arbore, sursei calde cu o temperatură suficient de mare pentru a putea fi utilizată în anumite scopuri practice. Temperatura sursei reci depinde de natura sursei de căldură, dar are în general valori mai mari decât temperatura mediului ambiant. Ca surse reci pentru pompele de căldură se utilizează fluide reziduale din unele procese industriale, stratul superficial al scoarței terestre până la adâncimi de 200-300 m (pompe de căldură cu sursă subterană), sau chiar acumulări mari de apă (lacuri naturale sau artificiale). Temperatura sursei calde depinde de scopul urmărit, de exemplu 35-45°C în cazul încălzirii pardoselilor sau pereților, 50-55°C în cazul preparării apei calde pentru consum menajer, sau 80-90°C în cazul încălzirii spațiilor cu calorifere.

Mașinile frigorifice sunt utilizate pentru a scădea temperatura sursei reci sub valoarea temperaturii mediului ambiant (instalații de climatizare, frigidere, congelatoare etc.). Căldura extrasă de la sursa rece este evacuată, împreună cu lucrul mecanic consumat la arbore, de obicei în mediul ambiant, astfel încât temperatura sursei calde mașinii frigorifice este în general egală cu temperatura mediului ambiant. În figura 5.3 sunt reprezentate schematic o pompă de căldură (ale cărei mărimi sunt notate cu indicele “p”) și o mașină frigorifică (ale cărei mărimi sunt notate cu indicele “f”).

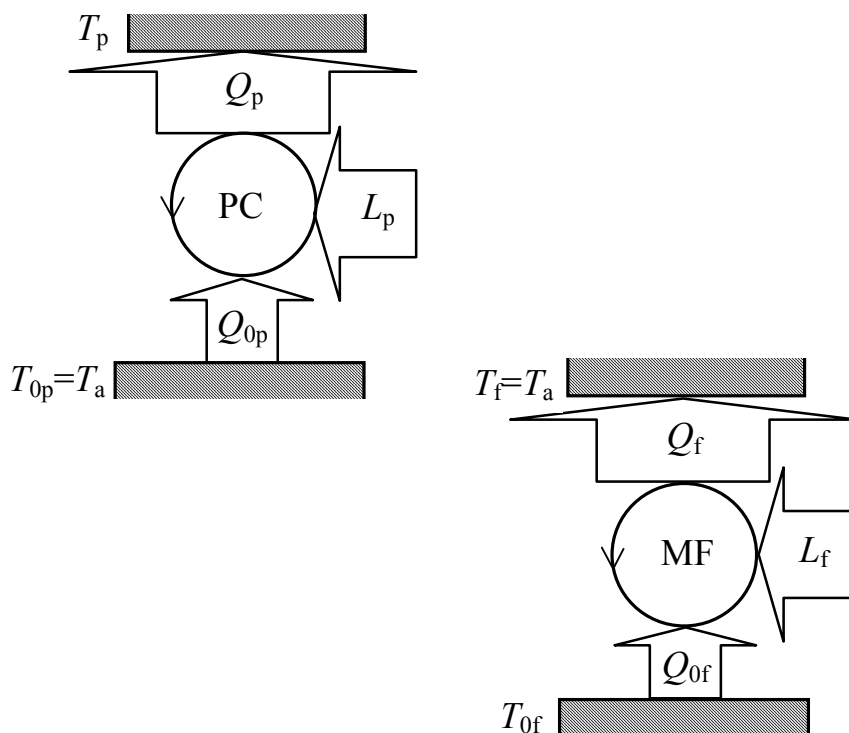


Figura 5.3: Pompa de căldură (PC) și mașina frigorifică (MF) reprezentate schematic

Pe parcursul unui ciclu, ambele mașini termice generatoare preiau căldura Q_0 de la sursa rece, primesc lucrul mecanic L din exterior și suma lor o cedează sub formă de căldură Q sursei calde, adică:

$$|Q| = Q_0 + |L| \quad (5.10)$$

Spre deosebire de mașinile termice motoare, pentru mașinile termice generatoare nu se poate defini un randament termic, deoarece valoarea acestora ar putea fi supraunitară (>1).

Pentru pompa de căldură se definește *eficiența termică*, notată ε_p , în mod analog randamentului termic, respectiv ca raport între ceea ce se produce util (în acest caz căldura Q cedată sursei calde) și ceea ce se consumă (lucrul mecanic L care trebuie furnizat din exterior):

$$\varepsilon_p = \frac{|Q|}{|L|} = \frac{|Q|}{|Q| - Q_0} > 1 \quad (5.11)$$

Pentru mașina frigorifică se definește *eficiența termică*, notată ε_f , ca raportul dintre ce este util (căldura Q_0 extrasă pentru răcirea sursei reci) și ceea ce se consumă (lucrul mecanic L furnizat din exterior la arborele mașinii):

$$\varepsilon_f = \frac{Q_0}{|L|} = \frac{Q_0}{|Q| - Q_0} \leq 1 \quad \text{sau} \geq 1 \quad (5.12)$$

5.4 Procese reversibile și ireversibile

În primul capitol, un *proces reversibil* a fost definit ca un proces termodinamic în cursul căruia un sistem poate suferi o transformare directă și una inversă în urma cărora revine în starea inițială fără a apărea modificări remanente nici în sistem și nici în mediul exterior. Dacă pentru ca o transformare să fie cvasistatică este suficient ca sistemul să treacă numai prin stări de echilibru, pentru ca procesul să fie reversibil se impun și condiții asupra mediului exterior, nu numai asupra sistemului. Este deci necesar ca schimburile de energie care au loc prin frontierele sistemului sub formă de căldură și lucru mecanic în timpul transformării directe și inverse să fie egale și de sens contrar.

Se pot imagina diferite procese reversibile, ca de exemplu: curgerea în regim staționar a unui fluid cu vâkozitate nulă printr-un ajutor convergent-divergent adiabatic; pendulul ideal (matematic); circuitul L-C paralel cu rezistență electrică nulă etc.

Putem de exemplu considera un piston care se deplasează fără frecare în interiorul unui cilindru în care închide un gaz ideal. Dacă atât cilindrul cât și pistonul sunt perfect adiabatici și pistonul se deplasează cu viteză infinit mică, atunci procesul de destindere urmată de comprimare până în starea inițială este un proces reversibil. Dacă sistemul este introdus într-un termostat, iar deplasarea pistonului are loc tot fără frecare și cu viteză infinit mică, atât la destindere cât și la comprimare, procesul este de asemenea reversibil. Termostatul este un sistem cu masă suficient de mare în comparație cu a sistemului pentru ca temperatura sa să rămână constantă indiferent de cantitățile de energie schimbate cu sistemul și în acest caz reprezintă mediul exterior pentru sistemul considerat. Căldura elementară pe care termostatul o cedează sistemului în timpul unei destinderi elementare datorate unei deplasări infinit mici a pistonului cu o viteză infinit mică este egală cu căldura elementară pe care o preia de la sistem în timpul comprimării elementare similare până la revenirea în starea inițială. Deci atât sistemul cât și mediul exterior (în acest caz termostatul) revin la starea inițială în urma procesului direct și invers, fără a apărea modificări remanente nici în sistem nici mediul exterior, ceea ce înseamnă că un astfel de proces este reversibil.

Procesul reversibil este însă un caz ideal. Acesta nu poate fi realizat în practică, dar poate fi utilizat ca termen de comparație, pentru a evalua în ce măsură procesele reale se apropie de procesele ideale reversibile.

În cazul în care un proces nu este reversibil, acesta se numește *proces ireversibil*.

Condiția ca transformările care au loc în timpul procesului să fie cvasistatice pentru ca procesul să fie reversibil este general valabilă. Dacă cel puțin o stare intermediară este în afară de echilibru, atunci transformările directă și inversă nu mai pot avea loc pe același drum. În exemplul considerat anterior, dacă deplasarea pistonului are loc cu viteză finită, atunci la destindere presiunea va fi mai mică pe suprafața pistonului și va crește cu depărtarea de acesta, iar la destindere presiunea va fi mai mare pe suprafața pistonului și va scădea cu depărtarea de acesta, deci stările intermediare nu vor fi stări de echilibru și evident transformările directă și inversă vor avea loc pe drumuri diferite. În acest caz, căldurile și lucrurile mecanice schimbate pe parcursul transformărilor directă și inversă nu mai pot fi egale deoarece, fiind parametrii de proces, depind de drumul transformării, astfel încât un asemenea proces este ireversibil.

În exemplul anterior am impus și condiția ca pistonul să se deplaseze în cilindru fără frecare. Nici acest lucru nu se poate realiza în practică, deoarece pentru a închide etanș gazul din cilindru pistonul trebuie să exercite o anumită presiune pe oglinda cilindrului. În acest caz, forța de frecare va consuma lucru mecanic atât la destindere cât și la comprimare, acesta fiind disipat sub formă de căldură în mediul exterior, ceea ce reprezintă o pierdere de energie, adică energia nu se transformă în forma dorită. Pistonul nu va reveni în poziția inițială, deci vor apărea modificări remanente în sistem. Căldura disipată în mediul exterior poate produce modificări remanente și în mediul exterior. Procesul real este și în acest caz ireversibil.

Căldura trece spontan (“de la sine”) întotdeauna de la un sistem cu temperatură mai mare la un sistem cu temperatură mai mică, niciodată invers, deci schimbul de căldură între două sisteme cu o diferență finită de temperatură este un proces ireversibil. Pentru a putea extrage căldura de la sistemul cu temperatură mai mică și a o ceda celui cu temperatură mai mare este necesară utilizarea unei mașini termice generatoare, căreia trebuie să i se furnizeze lucru mecanic din exterior, deci vor apărea modificări remanente cel puțin în mediul exterior.

În exemplul anterior, între sistem și mediul exterior trebuie să existe o diferență finită de temperatură pentru ca acestea să poată schimba căldură pe parcursul transformărilor directă și inversă. În interiorul cilindrului temperatura nu va fi constantă în acest caz, variind dinspre peretele exterior spre axa acestuia, deci stările intermediare nu vor fi stări de echilibru și deci procesul va fi ireversibil.

Procesele ideale care au fost enumerate anterior ca exemple de procese reversibile nu pot fi realizate în realitate decât ca procese ireversibile. Orice fluid real are viscozitate finită, deci în timpul curgerii apar forțe de frecare între particulele acestuia. Pendulul real trebuie să se miște într-un câmp gravitațional, pentru a exista forța de greutate, caz în care există și forțe de frecare în punctul în care este suspendat pendulul; în plus, dacă pendulul nu se mișcă în vid absolut, apare și o forță de frecare cu mediul ambiant. Circuitul L-C paralel nu poate fi realizat practic cu rezistență electrică nulă, astfel încât o parte din energia electrică este disipată sub formă de căldură în mediul înconjurător.

Cauzele care produc ireversibilitatea unui proces se numesc *surse de ireversibilitate*. Deoarece ireversibilitatea este în general asociată unor pierderi de energie (prin disipare în mediul exterior), identificarea surselor de ireversibilitate este importantă pentru găsirea unor soluții de limitare a efectelor acestora și deci de limitare a pierderilor.

Absența surselor de ireversibilitate atât din sistem cât și din mediul exterior duce al conceptul de *ireversibilitate totală*. În practică este uneori convenabilă studierea unor procese în care sursele de ireversibilitate lipsesc numai din sistem sau numai din mediul exterior, numite *reversibile intern* și respectiv *reversibile extern*.

5.5 Ciclul Carnot

La începutul secolului XIX, Nicolas Sadi Carnot a studiat procesele ciclice motoare și a arătat că randamentul termic maxim dintre toate ciclurile posibile între aceleași temperaturi extreme (T și T_0) este obținut de un ciclu ideal reversibil compus din două transformări izotermice și două transformări adiabatice, fluidul de lucru fiind un gaz ideal. Acest ciclu se numește în prezent *Ciclul Carnot*, iar randamentul său termic se numește *randament Carnot* și se notează η_c .

În figura 5.4 este reprezentat ciclul Carnot motor în diagrama p - v . Din starea 1, starea cu parametrii cei mai ridicați (presiunea și temperatura maxime), fluidul de lucru se destinde izotermic (la temperatura T) până în starea 2, unitatea de masă preluând căldura specifică q de la sursa caldă, după care se destinde adiabetic până la temperatura minimă (T_0). Urmează comprimarea izotermică până în starea 4, în timpul căreia fluidul de lucru cedează căldura specifică masică q_0 sursei reci și comprimarea adiabetică până în starea inițială 1.

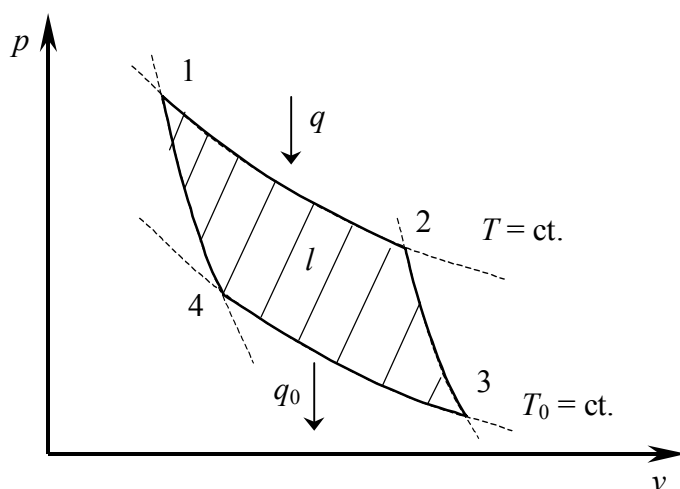


Figura 5.4: Ciclul Carnot în diagrama p - v

Se poate imagina o instalație formată din două turbine și două compresoare montate pe același arbore, în care fluidul de lucru parcurge un ciclu Carnot. Pentru ca procesul să fie reversibil, este necesar ca toate cele patru transformări simple să fie cvasistatice. În plus, pe parcursul transformărilor izotermice temperatura fluidului de lucru trebuie să fie egală cu cea a sursei cu care schimbă căldură (T și respectiv T_0) și deci este necesar ca fluidul de lucru să curgă cu viteză infinit mică prin turbina și compresorul izotermice pentru a permite schimbul de căldură în aceste condiții. Prin turbina și compresorul adiabatice fluidul de lucru trebuie însă să curgă cu viteză infinit mare pentru a nu avea timp să schimbe căldură cu mediul exterior. În general transformările din turbine și compresoare sunt considerate adiabatice, deoarece fluidele curg cu viteză relativ mare și în plus se pot izola termic suficient de bine. Este însă imposibil de construit turbine sau compresoare izotermice și este de asemenea imposibil ca în aceeași instalație fluidul să curgă cu viteze infinit mari în unele părți și cu viteze infinit mici în altele. În concluzie ciclul Carnot nu poate fi realizat practic, servind însă drept criteriu de comparație pentru ciclurile mașinilor termice reale.

Lucrul mecanic ciclic specific masic este egal în diagrama p - v cu aria suprafeței cuprinsă în interiorul ciclului și poate fi calculat ca suma algebrică a lucrurilor mecanice specifice masice de același tip și respectiv a căldurilor specifice masice schimbate pe parcursul celor 4 transformări simple. Pentru a calcula randamentul Carnot se vor analiza toate cele patru transformări simple ale fluidului de lucru, care este un gaz ideal perfect.

Destinderea izotermică 1→2 are loc la temperatura sursei calde $T = T_1 = T_2$.

Conform relațiilor 4.82 și 4.83, căldura primită de la sursa caldă și lucrul mecanic tehnic furnizat în exterior (ambele pozitive) sunt:

$$q = q_{12} = l_{12} = R_i \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} > 0 \quad (5.13)$$

Destinderea adiabatică 2→3 are loc între temperaturile extreme $T = T_2$ și $T_0 = T_3$.

Conform relației 4.90, lucrul mecanic tehnic furnizat în exterior este:

$$l_{23} = -c_p \cdot (T_3 - T_2) = c_p \cdot (T_2 - T_3) = c_p \cdot (T - T_0) > 0 \quad (5.14)$$

Comprimarea izotermică 3→4 are loc la temperatura sursei reci $T_0 = T_3 = T_4$.

Analog relației 5.13, căldura cedată sursei reci și lucrul mecanic tehnic primit din exterior (ambele negative) sunt:

$$q_0 = q_{34} = l_{34} = R_i \cdot T_0 \cdot \ln \frac{p_3}{p_4} < 0 \quad (5.15)$$

Comprimarea adiabatică 4→1 are loc între temperaturile extreme $T_0 = T_4$ și $T = T_1$.

Analog relației 5.14, lucrul mecanic tehnic primit din exterior este:

$$l_{41} = -c_p \cdot (T_1 - T_4) = c_p \cdot (T_2 - T_3) = c_p \cdot (T_0 - T) = -l_{23} \quad (5.16)$$

Se observă că întregul lucru mecanic tehnic produs la destinderea adiabatică 2→3 este consumat pentru comprimarea adiabatică 4→1, deci lucrul mecanic ciclic furnizat de unitatea de masă de fluid de lucru este egal cu suma algebrică a căldurilor sau a lucrurilor mecanice tehnice schimbate pe parcursul transformărilor izoterme:

$$l = q + q_0 = l_{12} + l_{34} = R_i T \ln \frac{p_1}{p_2} + R_i T_0 \ln \frac{p_3}{p_4} = R_i T \ln \frac{p_1}{p_2} - R_i T_0 \ln \frac{p_4}{p_3} \quad (5.17)$$

Aplicând transformărilor 2→3 și 4→1 legea transformărilor adiabatice (relațiile 4.88):

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} \text{ și respectiv: } \frac{p_1}{p_4} = \left(\frac{T_1}{T_4} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

se observă imediat că:

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{p_1}{p_4} \Leftrightarrow \frac{p_4}{p_3} = \frac{p_1}{p_2}$$

și atunci relația 5.17 se poate scrie sub forma:

$$l = q - |q_0| = R_i \cdot (T - T_0) \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (5.18)$$

Înlocuind relațiile de mai sus în relația 5.8, rezultă că randamentul Carnot este:

$$\eta_C = \frac{l}{q} = \frac{R_i (T - T_0) \ln \frac{p_1}{p_2}}{R_i T \ln \frac{p_1}{p_2}} = \frac{T - T_0}{T} = 1 - \frac{T_0}{T} \quad (5.19)$$

Din expresia randamentului termic (5.8) și cea a randamentului Carnot (5.19) rezultă că raportul căldurilor este egal cu raportul surselor cu care acestea sunt schimbate:

$$\eta_t = 1 - \frac{|q_0|}{q} = 1 - \frac{T_0}{T} = \eta_C \Leftrightarrow \frac{|q_0|}{q} = \frac{T_0}{T} \quad (5.20)$$

Ciclul Carnot poate fi parcurs și în sens trigonometric, ca ciclu generator. În acest caz se extrage căldura q_0 la temperatura T_0 și se evacuează căldura q la temperatura T , prin cheltuirea unui lucru mecanic l . Acest ciclu este utilizat ca termen de comparație pentru mașinile frigorifice și pompele de căldură. Pe baza relațiilor anterioare se poate demonstra imediat că eficiențele pompei de căldură și mașinii frigorifice Carnot sunt:

$$\varepsilon_{pC} = \frac{|q|}{|q| - q_0} = \frac{T}{T - T_0} \quad (5.21)$$

și respectiv:

$$\varepsilon_{fC} = \frac{q_0}{|q| - q_0} = \frac{T_0}{T - T_0} \quad (5.22)$$

5.6 Enunțuri ale principiului al doilea al termodinamicii

Primul principiu al termodinamicii este o lege a conservării și transformării energiei. Este deci, o lege cantitativă și în consecință se exprimă matematic printr-o relație de egalitate și în plus nu impune nici un fel de restricții în cea ce privește formele de energie care se transformă din una în alta, atâta timp cât suma lor rămâne constantă. În practică s-a observat însă că există fenomene care nu pot fi explicate numai pe baza acestui principiu. A apărut necesitatea de a formula și o lege calitativă, care să explice fenomenele observate în natură. Această lege a fost generalizată sub denumirea de principiul al II-lea al termodinamicii. Fiind o lege calitativă, ea va fi exprimată matematic printr-o relație de inegalitate. Ca și principiul I al termodinamicii, principiul al II-lea a devenit prin generalizare o lege universală a naturii.

Prima enunțare a principiului al doilea al termodinamicii este considerată în prezent ca fiind dată de Carnot în lucrarea despre procesele ciclice motoare publicată în 1824, în care a afirmat:

“O mașină termică motoare nu poate produce ciclic lucru mecanic decât dacă fluidul de lucru schimbă căldură cu două surse de căldură de temperaturi diferite”.

Trebuie precizat faptul că la acea dată principiul I al termodinamicii nu era cunoscut și că întreaga lucrare se bazează pe teoria caloricului (abandonată definitiv la scurt timp după aceea). Enunțul de mai sus este de fapt o sinteză a afirmațiilor lui Carnot utilizând noțiunile acceptate în prezent. În lucrarea sa Carnot introduce noțiunile de ciclu termodinamic și surse caldă și rece, încercând să demonstreze afirmația de mai sus fără a arăta că enunță un principiu.

În 1849, Kelvin arată că rezultatele studiilor experimentale asupra principiului întâi al termodinamicii din lucrările publicate de Mayer și Joule între 1840 și 1848 contrazic teoria caloricului, pe care se bazează lucrarea lui Carnot.

În 1850, Clausius rezolvă această contradicție considerând enunțul lui Carnot ca un principiu al termodinamicii, deci care nu poate fi demonstrat prin utilizarea unor alte principii, ca de exemplu cel al caloricului. Clausius a reformulat (și numerotat) ambele principii ale termodinamicii, dând ca enunț pentru principiul al doilea afirmarea ireversibilității unui proces real (trecerea spontană a căldurii de corpul mai cald la cel mai rece) sub forma:

“Este imposibil pentru o mașină care funcționează de la sine (care nu este ajutată din exterior prin nici un mijloc) să transporte căldură de la un corp de temperatură dată pe un altul la o temperatură mai mare”.

Utilizând acest enunț ca principiu, Clausius a demonstrat afirmația care se numește în prezent *Teorema lui Carnot*. Formularea “de la sine” arată faptul că în natură există sensuri preferențiale în care se produc spontan procesele reale și sensuri pentru care este nevoie de consum de energie furnizată din exterior.

În 1851, Kelvin a dat un alt enunț pentru principiu al doilea al termodinamicii (des utilizat în tratările clasice ale acestui principiu) sub forma:

“Este imposibil, cu ajutorul unui agent material fără viață, să se dezvolte în mod continuu un efect mecanic din orice porțiune de materie prin răcirea sa sub temperatura celui mai rece dintre obiectele din mediul înconjurător”.

În 1897, Planck a arătat că principiul al doilea al termodinamicii poate fi utilizat pentru a determina reversibilitatea sau ireversibilitatea unui proces și a dat un nou enunț (similar celui dat de Kelvin) și anume:

“Este imposibil de construit o mașină termică motoare care să lucreze ciclic și să nu producă nici un alt efect decât ridicarea unei greutate și răcirea unui rezervor de căldură”.

Se poate demonstra că enunțurile date de Clausius, Kelvin și Planck au aceleași consecințe, deci că ele sunt echivalente. O astfel de mașină ar produce lucru mecanic prin absorbirea căldurii de la o singură sursă, producând numai răcirea acesteia, sursă care ar putea fi chiar mediul ambiant, deci practic nelimitată, astfel încât această mașină ar fi de fapt un *perpetuum mobile*. Ostwald a reformulat aceste enunțuri astfel încât să semene cu un enunț clasic al principiului întâi, sub forma:

“Este imposibilă construirea unui perpetuum mobile de speța a doua (sau de ordinul al doilea)”.

Prin *perpetuum mobile* de speța a doua se înțelege o mașină termică de tipul celor definite de enunțurile anterioare ale principiului al doilea, a cărei funcționare nu contrazice însă principiul întâi al termodinamicii.

Planck a mai arătat că “toate procesele în care intervine frecarea sunt ireversibile”, sau generalizând “toate procesele naturale sunt ireversibile”. Se poate de asemenea demonstra că orice afirmare a ireversibilității unui proces real poate fi considerată ca o enunțare a principiului al doilea al termodinamicii.

Aceste formulări duc la concluzia că lucrul mecanic, ca energie ordonată, poate fi transformat integral în energie internă sau în altă formă de energie, pe când energia internă se poate transforma numai parțial în lucru mecanic sau în altă formă de energie, adică capacitatea ei de transformare este mai mică decât energiile ordonate: energia electrică sau mecanică. Între diferitele forme de energie există deci diferențe calitative.

Pe baza relației de egalitate între raportul căldurilor schimbate cu sursele de căldură și raportul temperaturilor acestora în cazul unui ciclu reversibil (relația 5.20), Kelvin a definit scara absolută de temperatură (care în prezent îi poartă numele), arătând că această scară nu depinde de natura nici unui sistem și că modul în care a fost definită o face echivalentă cu scara de temperatură a termometrului cu gaz ideal la volum constant (definită în capitolul 2).

5.7 Entropia

Principiul al doilea al termodinamicii evidențiază diferențele calitative dintre diferitele forme de energie, reversibilitatea și ireversibilitatea proceselor, sensul preferențial în care se desfășoară spontan procesele reale.

Fiind o lege calitativă, principiul al doilea al termodinamicii va fi exprimat prin relații de inegalitate. Pentru a putea scrie aceste relații este necesar să se definească un parametru de stare nou, măsurabil direct sau indirect, care să se poată modifica cel puțin în anumite condiții particulare într-un singur sens, pentru ca variația acestuia să fie o măsură calitativă a formelor de energie și a gradului de ireversibilitate a proceselor. Acest nou parametru de stare a fost introdus de Clausius și denumit *entropie*.

Considerăm un ciclu reversibil oarecare parcurs de un gaz ideal, reprezentat grafic în diagrama p - v în figura 5.5.

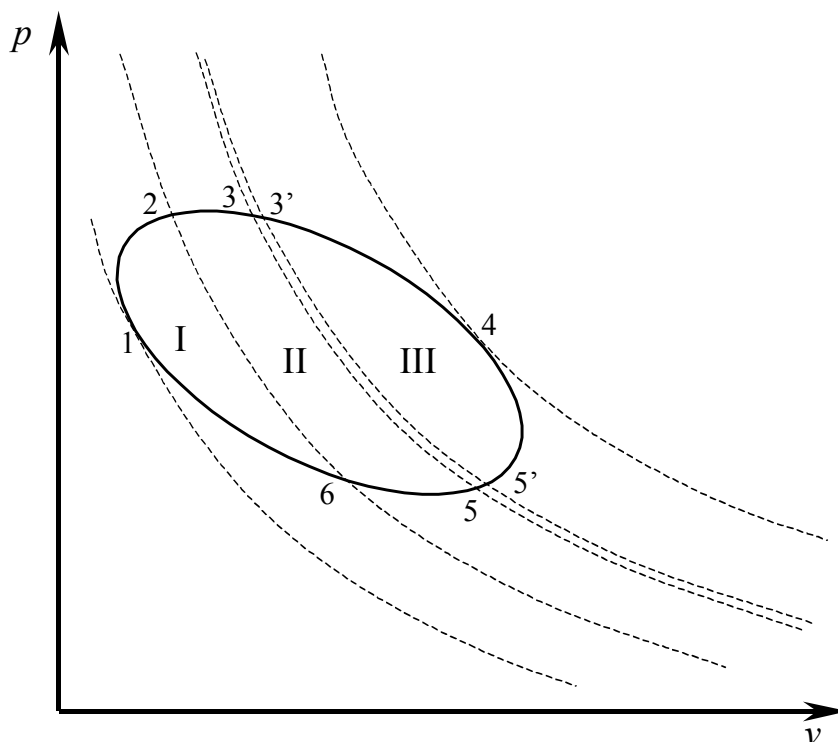


Figura 5.5: Ciclu reversibil oarecare în diagrama p - v

Alegem din familia adiabateilor din planul p - v cele două adiabate tangente exterior în punctele 1 și 4 la ciclul oarecare ales inițial și încă două care îl intersectează în punctele 2 și 6 și respectiv 3 și 5. În acest fel ciclul inițial a fost împărțit în trei cicluri și anume: ciclul I (1261), ciclul II (23562) și ciclul III (3453). Cum în diagrama p - v lucrul mecanic ciclic este egal cu aria suprafeței închise de ciclu, este evident că prin însumarea ciclurilor I, II și III se obține ciclul oarecare ales inițial. Într-adevăr, lucrul mecanic produs la destinderea adiabatică 2→6 în ciclul I este consumat pentru comprimarea adiabatică 6→2 în ciclul II, iar lucrul mecanic produs la destinderea adiabatică 3→5 în ciclul II este consumat pentru comprimarea adiabatică 5→3 în ciclul III.

Considerăm acum că intersectăm ciclul oarecare ales inițial cu un număr foarte mare de adiabate, astfel încât acestea să fie infinit apropiate între ele, ca de exemplu adiabata 3→5 de adiabata 3'→5'. Dacă numărul adiabateilor care intersectează ciclul oarecare este suficient de mare, atunci punctele 3 și 3' și respectiv 5' și 5 sunt infinit apropiate, iar transformările 3→3' și 5'→5 sunt transformări elementare. Am împărțit astfel ciclul inițial într-un număr foarte mare de cicluri elementare de tipul ciclului (33'5'53).

Pentru fiecare ciclu elementar astfel definit, deoarece transformările care fac parte din ciclul oarecare inițial sunt transformări elementare, acestea pot fi acceptate ca izotermice (stările extreme fiind infinit apropiate). Atunci fiecare ciclu elementar este un ciclu Carnot, transformările elementare (de tipul 3→3' și 5'→5) fiind izotermice, iar cele finite (de tipul 3'→5' și 5→3) fiind adiabaticice, deci relația 5.20 este valabilă pentru fiecare ciclu elementar. Deoarece transformările izotermice sunt transformări elementare, căldurile schimbate cu cele două surse sunt și ele cantități elementare. Pentru un ciclu elementar Carnot oarecare "j" putem atunci scrie relația 5.20 sub forma:

$$\frac{\delta Q_j}{T_j} = \frac{|\delta Q_{0j}|}{T_{0j}} \quad \text{sau} \quad \frac{\delta Q_j}{T_j} - \frac{|\delta Q_{0j}|}{T_{0j}} = 0$$

Renunțând la scrierea explicită a faptului că întotdeauna căldura cedată sursei reci este negativă și renunțând și la notarea cu indicele “0” a mărimilor corespunzătoare sursei reci, se poate scrie că pentru fiecare ciclu elementar Carnot suma tuturor rapoartelor dintre căldura schimbată și temperatura sursei este nulă, adică

$$\frac{\delta Q_j}{T_j} + \frac{\delta Q_{0j}}{T_{0j}} = 0 \Leftrightarrow \sum_j \frac{\delta Q}{T} = 0$$

În relațiile de mai sus apar numai parametrii (de stare și de proces) ai transformărilor izotermice elementare. Însușind ultima relație pentru toate cele “n” cicluri elementare Carnot în care a fost împărțit ciclul oarecare ales inițial se obține:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (5.23)$$

Aceasta înseamnă că suma rapoartelor dintre căldura schimbată și temperatura sursei respective pentru toate transformările elementare (considerate izotermice) în care a fost împărțit ciclul oarecare ales inițial este nulă. În cazul în care numărul izotermelor cu care se intersectează ciclul oarecare tinde spre infinit, înseamnă că și numărul transformărilor în care a fost împărțit acesta tinde spre infinit, deci acestea chiar sunt transformări elementare și pot fi considerate izotermice în sensul că temperatura sursei cu care se schimbă căldură este egală cu temperatura fluidului de lucru în orice stare de echilibru de pe parcursul ciclului oarecare. În acest caz $n \rightarrow \infty$ și suma din relația 5.23 devine integrala curbilinie definită pe conturul închis de ciclul reversibil oarecare ales inițial, adică:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (5.24)$$

Integrala din relația 5.24 se numește “*integrala lui Clausius*”. În orice ciclu reversibil integrala lui Clausius este nulă. Integrala fiind definită pe un contur închis, rezultă că expresia de sub integrală este diferențiala unui parametru de stare, deoarece aceasta este una dintre proprietățile parametrilor de stare. Acest nou parametru de stare a fost denumit de Clausius *entropie*, se notează cu “*S*” și este un parametru extensiv din grupa parametrilor calorici de stare (ca și energia internă și entalpia). În relația de definiție a entropiei în formă diferențială se utilizează și indicele “rev” pentru a evidenția faptul că integrala lui Clausius este nulă numai în cazul proceselor ciclice reversibile:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \quad (5.25)$$

Ca și pentru orice alt parametru extensiv, se poate defini parametrul intensiv numit *entropie specifică masică* prin raportare la masa sistemului:

$$ds = \frac{dS}{m} = \frac{\delta q}{T} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \quad (5.26)$$

Se observă că unitatea de măsură a entropiei specifice masice este identică cu cea a constantei termodinamice caracteristice a unui gaz ideal și cu cea a capacității calorice specifice masice, dar spre deosebire de aceasta din urmă, unitatea de măsură a temperaturii [K] nu se poate înlocui cu [°C] deoarece în relația de definiție a entropiei nu apare o variație infinit mică a temperaturii, ci temperatura absolută *T*.

5.8 Proprietățile entropiei

Entropia fiind un parametru de stare extensiv, ea este o mărime aditivă, adică entropia unui sistem compus din mai multe subsisteme aflate în echilibru termic este egală cu suma entropiilor tuturor subsistemelor componente.

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=1}^n S_i \quad (5.27)$$

Entropia unui sistem într-o stare de echilibru în care are temperatura absolută T se poate calcula integrând relația 5.25 între o stare de referință (de exemplu cea cu temperatura absolută 0) și starea respectivă a sistemului, adică:

$$S_T = S_0 + \int_0^T \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \quad (5.28)$$

Entropia este deci definită numai cu aproximația unei constante de integrare, în acest caz entropia sistemului la temperatura absolută 0 (notată S_0 în relația 5.28). Nernst a arătat că entropia sistemelor omogene la temperatura absolută zero este nulă. Această afirmație este uneori denumită principiul al treilea al termodinamicii, dar este în general cunoscută ca *Teorema lui Nernst*, nefiind recunoscută ca principiu al termodinamicii deoarece nu este general valabilă (ci doar pentru sisteme omogene) și nu necesită definirea unui nou parametru de stare (ca și celelalte principii), ci doar precizează o proprietate a unui parametru de stare definit în cadrul principiului al doilea.

În aplicațiile tehnice nu este necesară cunoașterea constantei de integrare, deoarece se calculează numai variațiile entropiei, în unele cazuri fiind convenabil să se aleagă o altă stare de referință în care să se atribuie prin convenție entropiei valoarea 0. În cazul în care sistemul suferă o transformare cvasistatică, variația entropiei sale se poate calcula integrând relația de definiție în formă diferențială între stările extreme. În plus, căldura elementară schimbată de sistem se poate explicita din expresiile matematice ale principiului întâi, adică:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_1^2 \frac{dU + p \cdot dV}{T} = \int_1^2 \frac{dI - V \cdot dp}{T} \quad (5.29)$$

Fiind un parametru de stare, variația entropiei în timpul unei transformări nu depinde de drumul transformării, ci doar de stările extreme (inițială și finală) de echilibru. Pentru a putea integra efectiv relațiile 5.29 trebuie să se cunoască ecuația termică de stare și ecuațiile calorice de stare ale sistemului respectiv.

5.9 Calculul variațiilor de entropie

În cazul în care un sistem parcurge o transformare finită 1→2, în general nu ne interesează valorile absolute ale entropiei în stările extreme (1 și 2), ci doar variația entropiei sistemului în timpul transformării. Aceasta se poate determina prin integrarea relației de definiție sub formă diferențială între stările 1 și 2.

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 dS$$

În cazul în care sistemul suferă o transformare cvasistatică în cadrul unui proces reversibil, căldura schimbată se poate determina din expresiile matematice ale principiului întâi al termodinamicii:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta L}{T} = \int_1^2 \frac{dI + \delta L_t}{T} = \int_1^2 \frac{dU + p dV}{T} = \int_1^2 \frac{dI - V dp}{T}$$

În cazul în care sistemul este un gaz ideal se pot utiliza ecuațiile calorice de stare și ecuația termică de stare a gazului ideal. Pentru o masă unitară se poate scrie:

$$\Delta S = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{du + p dv}{T} = \int_1^2 \frac{c_v dT}{T} + \int_1^2 \frac{p dv}{T} = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R_i \int_1^2 \frac{dv}{v} = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R_i \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (5.30)$$

sau:

$$\Delta S = s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{di - v dp}{T} = \int_1^2 \frac{c_p dT}{T} - \int_1^2 \frac{v dp}{T} = c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - R_i \int_1^2 \frac{dp}{p} = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R_i \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (5.31)$$

de unde rezultă că:

$$c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R_i \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R_i \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (5.32)$$

Din expresia de definiție a entropiei sub formă diferențială dată de Clausius se observă că în cazul general entropia unui sistem poate varia în ambele sensuri. Dacă sistemul primește căldură, aceasta este pozitivă, iar temperatura T fiind de asemenea pozitivă, înseamnă că $\delta S > 0$ adică entropia sistemului crește. Dacă sistemul cedează căldură, aceasta este negativă și atunci $\delta Q < 0$, deci entropia sistemului scade. Fiind un parametru de stare extensiv, entropia unui sistem se modifică și dacă acesta schimbă masă cu mediul înconjurător.

Anterior am afirmat că noul parametru de stare necesar a fi introdus pentru principiul al doilea al termodinamicii (entropia) trebuie să se poată modifica într-un singur sens cel puțin în anumite cazuri particulare, pentru a putea indica sensul preferențial de desfășurare a proceselor reale și pentru a putea evalua gradul de ireversibilitate a acestora.

Deoarece entropia se poate modifica în ambele sensuri atunci când sistemul schimbă cu mediul înconjurător energie sau masă, vom analiza cazul unui sistem închis și izolat. Fiind un parametru de stare, entropia unui sistem închis și izolat aflat în stare de echilibru trebuie să rămână constantă. Putem analiza cazul unui sistem compus din cel puțin două subsisteme care nu se află în echilibru termic între ele, de tipul celui din figura 2.1. În mult cazuri practice este însă necesar să se analizeze stările de neechilibru sau procesele ireversibile ale unor sisteme deschise și/sau neizolate. În aceste cazuri se poate defini un sistem închis și izolat prin izolarea, împreună cu sistemul analizat, a unei porțiuni suficient de mari din mediul exterior astfel încât eventualele interacțiuni prin frontiera imaginară considerată să poată fi neglijate.

Considerăm de exemplu o casă încălzită (cu temperatura T_c) aflată iarna în atmosfera terestră (cu temperatura aerului $T_a < T_c$). Casa este un sistem închis, dar nu și izolat. Pentru a defini un sistem închis și izolat, considerăm că sistemul de încălzire este oprit și că izolăm, împreună cu casa, un volum suficient de mare din atmosfera terestră. Dacă suprafața imaginară care constituie frontiera sistemului astfel definit este suficient de departe de casă, temperatura aerului atmosferic nu se modifică datorită căldurii preluate de la casă (deci atmosfera este un termostat) și chiar dacă prin frontiera imaginară exterioară a sistemului se schimbă masă (prin acțiunea vântului), acesta va avea aceeași temperatură, deci se poate accepta că sistemul astfel definit nu schimbă nici masă și nici energie cu mediul exterior.

În interiorul sistemului definit mai sus, subsistemul casă va ceda căldură subsistemului atmosferă. Atunci entropia ambelor subsisteme se modifică. Entropia casei scade, iar entropia atmosferei crește. Căldura schimbată este aceeași ca valoare absolută, dar este negativă pentru casă și este pozitivă pentru atmosferă. Entropia totală a sistemului se poate și ea modifica.

Conform proprietății de aditivitate a parametrilor de stare extensivi, variația totală a entropiei este egală cu suma variațiilor entropiilor tuturor subsistemelor care alcătuiesc sistemul, adică pentru un proces elementar:

$$dS = dS_a + dS_c \quad (5.33)$$

Înlocuim variațiile elementare ale entropiilor celor două subsisteme cu relația de definiție a lui Clausius, ținând cont de faptul că aceeași căldură trece de la un subsistem la celălalt ($\delta Q = \delta Q_a = -\delta Q_c$), adică:

$$dS = \frac{|\delta Q|}{T_a} - \frac{|\delta Q|}{T_c} = |\delta Q| \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_c} \right) = |\delta Q| \frac{T_c - T_a}{T_a \cdot T_c} \geq 0 \quad (5.34)$$

Deoarece aerul din casă are temperatură mai mare decât cel atmosferic ($T_c > T_a$) rezultă că $(T_c - T_a) > 0$, deci $dS > 0$, adică entropia sistemului crește. Cum căldura trece întotdeauna de la corpul mai cald la cel mai rece, rezultă că întotdeauna entropia unui sistem închis și izolat crește atunci când în interiorul său are loc un proces ireversibil.

În timp, casa se răcește până ajunge la temperatura aerului atmosferic. După timpul de relaxare, $T_a = T_c$, deci $T_c - T_a = 0$, deci $dS = 0$ (entropia sistemului rămâne constantă). Deci la echilibru termic entropia unui sistem atinge valoarea maximă posibilă plecând dintr-o stare de neechilibru dată. Cu cât starea inițială a sistemului este mai departe de echilibru, cu atât creșterea de entropie este mai mare.

În exemplul anterior putem considera un proces reversibil în care casa ar schimba căldură cu aerul atmosferic având însă ambele aceeași temperatură. Un exemplu analog este o transformare izotermică a ciclului Carnot, pe parcursul cărei fluidul de lucru schimbă căldură cu o sursă de aceeași temperatură, procesul fiind și în acest caz reversibil. În oricare din aceste cazuri, când în interiorul unui sistem au loc numai procese reversibile, din relația 5.34 se vede că entropia sistemului rămâne constantă.

Orice proces ireversibil are însă loc cu creșterea entropiei, adică ireversibilitatea creează întotdeauna entropie. Și în cazul unui sistem aflat într-o stare în afară de echilibru care tinde spontan spre o stare de echilibru entropia crește deoarece și acest proces este ireversibil. Notând cantitatea elementară de entropie creată datorită ireversibilității unui proces elementar ireversibil cu δS_{irev} , se poate scrie că în general:

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} + \delta S_{\text{irev}} \quad (5.35)$$

În cazul general, pentru un sistem care suferă o transformare finită 1→2 se poate scrie relația 5.36, numită și *inegalitatea lui Clausius*:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} + (S_{\text{irev}})_{12} \geq \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \quad (5.36)$$

În concluzie se poate spune că în cazul în care un proces este reversibil variația entropiei este egală cu integrala lui Clausius, iar dacă procesul este ireversibil variația entropiei este mai mare decât integrala lui Clausius.

O expresie des întâlnită în termodinamică se poate deduce din relația de definiție în formă diferențială a entropiei și expresiile matematice ale principiului întâi pentru procese reversibile:

$$T \cdot ds = du + p \cdot dv = di - v \cdot dp \quad (5.37)$$

sau, în forma generală scrisă pentru prima oară de Clausius și denumită *ecuația fundamentală a termodinamicii*:

$$T \cdot dS \geq dU + p \cdot dV \quad (5.38)$$

Se mai pot defini două funcții potențial termodinamice, care sunt utilizate într-o altă metodă de tratare a proceselor termodinamice:

- entalpia liberă Gibbs: $G = I - T \cdot S$ (5.39)

- energia internă liberă Helmholtz: $F = U - T \cdot S$ (5.40)

5.10 Diagrama $T - s$

În diagrama mecanică ($p-v$) se poate reprezenta grafic lucrurile mecanice, dar nu și căldurile schimbate pe parcursul unei transformări. Conform postulatului de stare, starea unui sistem este determinată de valorile a doi parametri de stare independenți. Deci orice stare de echilibru a unui sistem poate fi reprezentată într-o diagramă plană cu două axe de coordonate în funcție de oricare doi parametri de stare independenți aleși. La studiul proceselor care au loc în instalații termice se folosesc frecvent diagrame în care pe una dintre axele de coordonate (de obicei abscisa) este entropia specifică masică s [J/kg K]. Acestea se numesc *diagrame entropice* și cele mai des întâlnite sunt diagramele $T-s$ și $i-s$.

Entropia fiind un parametru de stare definit în funcție de căldura schimbată și temperatura absolută a sistemului, este de așteptat ca într-o diagramă plană $T-s$ căldura specifică masică q să se poată reprezenta grafic în funcție de temperatura absolută T și entropia specifică masică s . În figura 5.6 este reprezentată în diagrama $T-s$ o transformare cvasistatică $1 \rightarrow 2$ dintr-un proces reversibil și o transformare nestatică $1 \rightarrow 2_{ir}$ din cadrul unui proces ireversibil desfășurat din aceeași stare inițială 1 până la o stare finală 2_{ir} aflată la aceeași temperatură cu starea finală 2 a transformării cvasistatice.

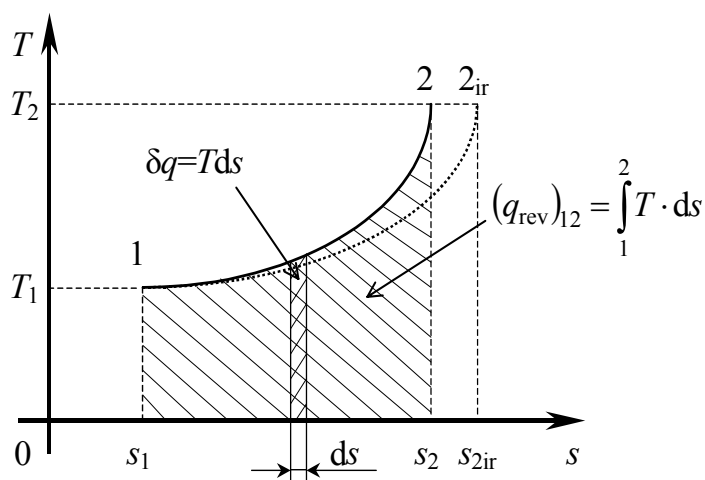


Figura 5.6: Transformare cvasistatică și nestatică în diagrama $T-s$

Din relația de definiție a entropiei specifice masice în formă diferențială ($ds = \delta q_{rev}/T$) se observă imediat că se poate exprima căldura elementară specifică masică schimbată într-un proces reversibil elementar în funcție de temperatura absolută T și variația elementară a entropiei specifice masice ds :

$$\delta q_{rev} = T \cdot ds \quad (5.41)$$

iar pentru transformare finită cvasistatică $1 \rightarrow 2$ din figura 5.6 căldura specifică masică se poate calcula integrând relația 5.41 între stările extreme:

$$(q_{rev})_{12} = \int_1^2 T \cdot ds \quad (5.42)$$

Din figura 5.6 se observă că în diagrama T - s căldura elementară specifică masică (δq_{rev}) este egală cu aria dreptunghiului de lățime ds și înălțime T (considerată constantă pentru transformarea elementară), iar căldura specifică masică ($q_{\text{rev}})_{12}$ cu aria suprafeței cuprinsă între curba transformării și axa entropiilor (cu condiția ca sistemul de axe de coordonate să aibă originea în punctul 0 ($T = 0$ și $s = 0$)).

Deoarece stările de neechilibru nu se pot reprezenta grafic, transformările nestatice sunt reprezentate și în diagrama T - s prin linii întrerupte. Din acest motiv căldura schimbată în timpul unui proces ireversibil nu poate fi reprezentată grafic în această diagramă. În cazul transformării nestatice $1 \rightarrow 2_{\text{ir}}$ din figura 5.6, starea finală 2_{ir} se află la dreapta stării finale 2 a transformării cvasistatice, la entropia specifică masică $s_{2\text{ir}} > s_2$, datorită entropiei generate de ireversibilitatea procesului. În cazul transformării nestatice inverse (nereprezentată în figura 5.6) din starea 2 până în starea finală 1_{ir} aflată la aceeași temperatură cu starea 1, aceasta s-ar afla de asemenea la dreapta stării 1, cu $s_{1\text{ir}} > s_1$, tot datorită entropiei create de ireversibilitate.

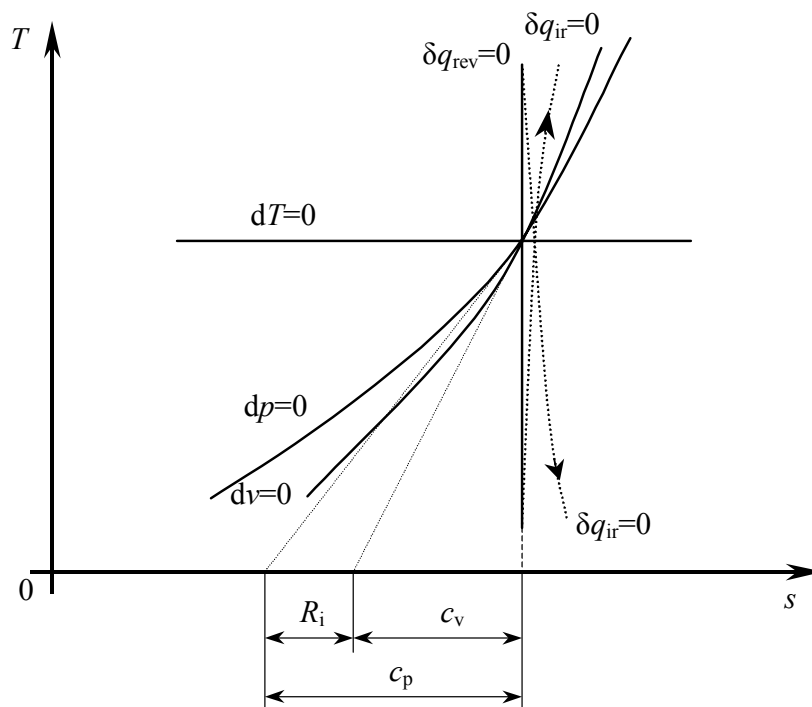


Figura 5.7: Transformările simple ale gazului ideal în diagrama T - s

În figura 5.7 sunt reprezentate transformările simple ale gazului ideal în diagrama T - s .

Izoterma ($dT = 0$) este evident o dreaptă orizontală, nu numai în cazul gazului ideal, ci pentru orice sistem, indiferent de natura sa chimică.

Din relația de definiție a entropiei în formă diferențială rezultă imediat că pentru o transformare adiabatică într-un proces reversibil $\delta q_{\text{rev}} = 0 \Rightarrow ds = 0$, deci în diagrama T - s aceasta este reprezentată printr-o dreaptă verticală (de entropie constantă) numită *izentropă*. Transformările adiabaticice din procese ireversibile au loc cu creștere de entropie, deci vor fi reprezentate cu linie întreruptă curbă, starea finală aflându-se la dreapta stării inițiale, indiferent de sensul în care are loc transformarea. Aceste reprezentări sunt și ele valabile pentru orice sistem, nu numai pentru gazul ideal, deoarece depind numai de relația de definiție a entropiei.

Pentru a putea însă reprezenta grafic în diagrama T - s izobarele și izocorele trebuie să integrăm relația de definiție a entropiei pentru condițiile specifice transformării izobarice ($dp=0$) și respectiv izocorice ($dv=0$), iar pentru aceasta este necesar să se cunoască ecuațiile de stare ale sistemului respectiv.

Pentru gazul ideal, în parametri intensivi, utilizând expresiile matematice ale principiului întâi al termodinamicii, se poate scrie:

$$ds = \frac{\delta q_{\text{rev}}}{T} = \frac{du + p \cdot dv}{T} = \frac{di - v \cdot dp}{T} \quad (5.43)$$

Înlocuind diferențialele energiei interne specifice *masice* și entalpiei specifice *masice* din ecuațiile calorice de stare respective și impunând condițiile transformării izocorice și respectiv izobarice, relațiile 5.43 se integrează astfel:

$$dv = 0 \Rightarrow ds = du/T = (c_v \cdot dT)/T \Rightarrow s = s_0 + c_v \cdot \ln T \Rightarrow T = e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \quad (5.44)$$

$$dp = 0 \Rightarrow ds = di/T = (c_p \cdot dT)/T \Rightarrow s = s_0 + c_p \cdot \ln T \Rightarrow T = e^{\frac{s-s_0}{c_p}} \quad (5.45)$$

Din ecuațiile de mai sus se observă că în diagrama T - s izocorele și izobarele gazului ideal sunt curbe exponențiale, s_0 fiind în ambele cazuri constanta de integrare. Acestea au însă pante diferite, determinate de subtangentele lor (raportul dintre funcție și derivata sa).

Pentru transformarea izocorică:

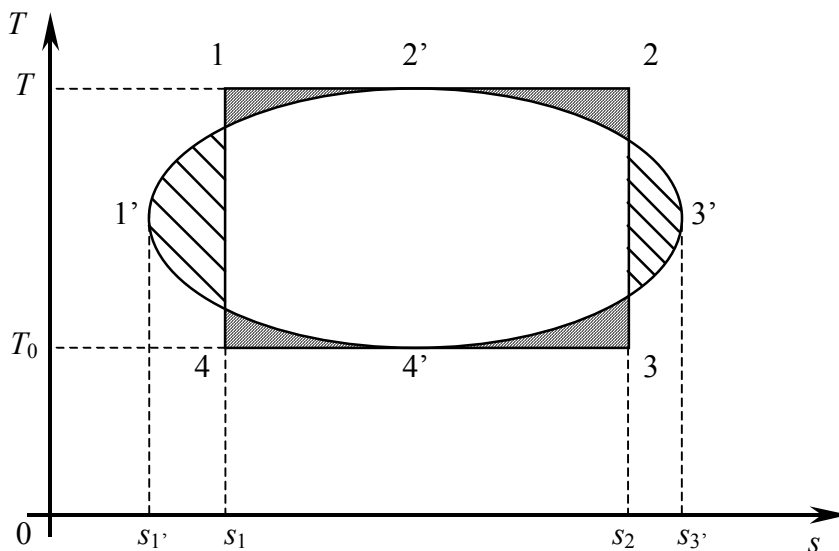
$$T' = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{c_v} e^{\frac{s-s_0}{c_v}} \Rightarrow \frac{T}{T'} = c_v \quad (5.46)$$

Pentru transformarea izobarică:

$$T' = \frac{dT}{ds} = \frac{1}{c_p} e^{\frac{s-s_0}{c_p}} \Rightarrow \frac{T}{T'} = c_p \quad (5.47)$$

După cum se vede și în diagrama din figura 5.7, deoarece conform relației lui Mayer întotdeauna $c_p > c_v$, panta izocorei este mai mare decât cea a izobarei.

În diagrama T - s se poate arăta grafic foarte ușor că randamentul ciclului Carnot este randamentul termic maxim posibil pentru un ciclu care se desfășoară între aceleași temperaturi extreme. Pentru aceasta considerăm un ciclu oarecare ($1'2'3'4'1'$), care se desfășoară între aceleași temperaturi extreme T și T_0 între care funcționează și ciclul Carnot (12341), ambele închizând câte o suprafață cu arii egale, deci având același lucru mecanic ciclic (figura 5.8).



$$\eta_c = \frac{l_c}{q_c} = \frac{\text{aria}(12341)}{\text{aria}(12s_2s_11)}$$

$$\eta_t = \frac{l}{q} = \frac{\text{aria}(1'2'3'4'1')}{\text{aria}(1'2'3's_3's_1'1')}$$

Figura 5.8: Ciclul Carnot și un ciclu oarecare în diagrama T - s

Pentru ca lucrurile mecanice ciclice să fie egale, ariile hașurate în sens contrar trebuie să fie egale, adică aria (12341) = aria (1'2'3'4'1'). Căldura primită de ciclul oarecare este egală cu aria (1'2'3's₃s₁1'), care este întotdeauna mai mare decât căldura primită de ciclul Carnot, egală cu aria (12s₂s₁1), și deci întotdeauna randamentul termic al ciclului oarecare este $\eta_t < \eta_c$ randamentul Carnot.

5.11 Exergia și anergia

5.11.1 Definiții

Principiul al doilea al termodinamicii arată că nu toate formele de energie se pot transforma integral în alte forme de energie. Din acest motiv, pentru studiul calitativ al proceselor reale este utilizată noțiunea de *exergie*, notată “*Ex*”, care este definită ca partea din energia totală a unui sistem care se poate transforma integral în altă formă de energie. Partea din energia unui sistem care nu se poate transforma în altă formă de energie se numește *anergie* și se notează “*An*”. În general energia totală a unui sistem este compusă din exergie și anergie, adică:

$$E = Ex + An \quad [\text{J}] \quad (5.48)$$

sau în parametrii intensivi (pentru unitatea de masă):

$$e = ex + an \quad [\text{J/kg}] \quad (5.49)$$

În anumite cazuri particulare, una din cele două componente poate fi nulă. Energia electrică și energia mecanică de exemplu conțin numai exergie. Energia mediului conține numai anergie. Energia internă conține însă atât exergie cât și anergie, deoarece o parte din ea poate fi transformată în energie mecanică.

Exergia este deci o măsură a calității energiei. Cu cât conține mai multă exergie, cu atât este mai valoroasă energia respectivă.

Din principiul al doilea al termodinamicii rezultă imediat că sunt adevărate afirmațiile:

1. la toate procesele ireversibile se transformă exergie în anergie;
2. numai la procesele reversibile exergia rămâne constantă;
3. nu se poate transforma anergia în exergie.

Partea din energie care se transformă în anergie în timpul unui proces ireversibil se numește *exergie pierdută* și se notează “*Ex_p*” Pentru un sistem care suferă o transformare din starea inițială 1 în starea finală 2 astfel încât energia sa totală rămâne constantă, se poate scrie, în cazul general:

$$\begin{aligned} Ex_1 + An_1 &= Ex_2 + An_2 \\ \text{sau: } An_2 - An_1 &= Ex_1 - Ex_2 = (Ex_p)_{12} \end{aligned} \quad (5.50)$$

În cazul unui proces reversibil exergia pierdută este nulă, iar în cazul unui proces ireversibil exergia pierdută are valoare numerică pozitivă.

5.11.2 Exergia căldurii

Căldura poate fi transformată în lucru mecanic numai prin utilizarea unui ciclu motor. După cum a fost demonstrat anterior, randamentul Carnot este randamentul termic maxim care poate fi obținut (teoretic) pentru un ciclu motor desfășurat între două temperaturi extreme date. Exergia căldurii Q primită de sistem de la sursa caldă cu temperatura T este deci lucrul mecanic ciclic L obținut într-un ciclu Carnot cu temperatura minimă disponibilă a sursei reci, care este

temperatura mediului ambiant. Dacă am încerca să coborâm temperatura sursei reci sub temperatura mediului ambiant ar fi necesară utilizarea unei mașini frigorifice, care ar consuma lucru mecanic. Atunci exergia căldurii Q primită de un sistem cu temperatura T este:

$$Ex = \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) \cdot Q \quad (5.51)$$

iar anergia acesteia este:

$$An = \frac{T_a}{T} \cdot Q \quad (5.52)$$

În cazul în care sistemul suferă o transformare $1 \rightarrow 2$ în timp ce primește căldura Q_{12} , exergia acesteia este:

$$Ex_{12} = \int_1^2 \left(1 - \frac{T_a}{T}\right) \cdot \delta Q = Q_{12} - T_a \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = Q_{12} - T_a \cdot [(S_2 - S_1) + (S_{ir})_{12}] \quad (5.53)$$

iar anergia acesteia este:

$$An_{12} = T_a \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = T_a \cdot [(S_2 - S_1) + (S_{ir})_{12}] \quad (5.54)$$

Pentru un proces ireversibil în care un sistem cu temperatura T_1 cedează căldura Q unui alt sistem cu temperatura $T_2 < T_1$, exergia pierdută în timpul acestui proces este:

$$Ex_{p12} = Ex_1 - Ex_2 = \frac{T_a}{T_2} Q - \frac{T_a}{T_1} Q = T_a \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \cdot Q = T_a \cdot (S_{ir})_{12} \quad (5.55)$$

Procesele reale fiind ireversibile, ele duc la o degradare a energiei prin transformarea exergiei în anergie. Exergia pierdută este o măsură calitativă a pierderilor termodinamice datorită ireversibilității, la fel ca și entropia creată datorită ireversibilității, între cele două mărimi existând și o relație de proporționalitate, după cum se vede în relația 5.55. Tot din această relație se observă că exergia pierdută este cu atât mai mare cu cât este mai mare diferența de temperatură între cele două sisteme care schimbă căldură.

5.11.3 Diagrama fluxului exergetic - anergic. Randamentul exergetic

Fluxurile sau cantitățile de energie schimbate în timpul unui proces termodinamic pot fi reprezentate grafic prin săgeți a căror lățime este proporțională cu parametrul pe care îl simbolizează. O astfel de diagramă se numește *diagrama Sankey* și este o reprezentare grafică numai a principiului întâi al termodinamicii. În figura 5.9 sunt prezentate diagramele Sankey pentru un proces de schimb de căldură (fig. a) și respectiv o mașină termică motoare (fig. b).



Figura 5.9: Diagramele Sankey pentru schimb de căldură (a) și mașină termică motoare (b)

După cum se observă din figura 5.9, diagrama Sankey nu dă nici o informație despre principiul al doilea al termodinamicii, despre reversibilitatea sau ireversibilitatea proceselor, sau despre cât din energia disponibilă a fost efectiv transformată într-o formă utilă.

Pentru a putea reprezenta grafic și informații de acest tip se pot utiliza diagrame ale fluxurilor exergetice și anergetice schimbate în timpul proceselor reale, în care fiecare săgeată proporțională cu o anumită căldură sau lucru mecanic este împărțită în două benzi de culori diferite proporționale cu exergia și respectiv cu anergia cantității respective de energie.

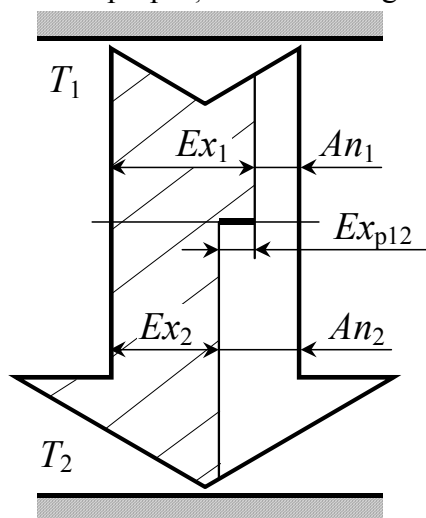


Figura 5.10: Diagrama fluxului exergetic – anergetic pentru transferul de căldură

În figura 5.10 este reprezentată diagrama fluxului exergetic - anergetic pentru procesul de schimb de căldură între sistemele cu temperaturile $T_1 > T_2$ analog celui din figura 5.9 a). Se observă că este reprezentat printr-o linie orizontală locul în care se petrece efectiv procesul, iar exergia pierdută Ex_{p12} este reprezentată în acest loc ca un segment de grosime mai mare.

Pentru cazuri particulare se trec în diagramă valorile numerice ale temperaturilor, exergiilor, anergiilor și exergiei pierdute, astfel încât se pune clar în evidență faptul că pierderea de exergie este cu atât mai mare cu cât este mai mare diferența de temperatură dintre sistemele care schimbă căldură. În cazul reprezentat în figura 5.10, din aceeași căldură Q cedată de sistemul cu temperatură mai mare doar Ex_2 mai poate fi transformată în altă formă de energie de către sistemul mai rece, deci calitatea aceleiași cantități de energie scade cu valoarea exergiei pierdute.

În figura 5.11 sunt reprezentate diagramele fluxului exergetic – anergetic pentru o mașină termică motoare reversibilă (a) și una ireversibilă (b).

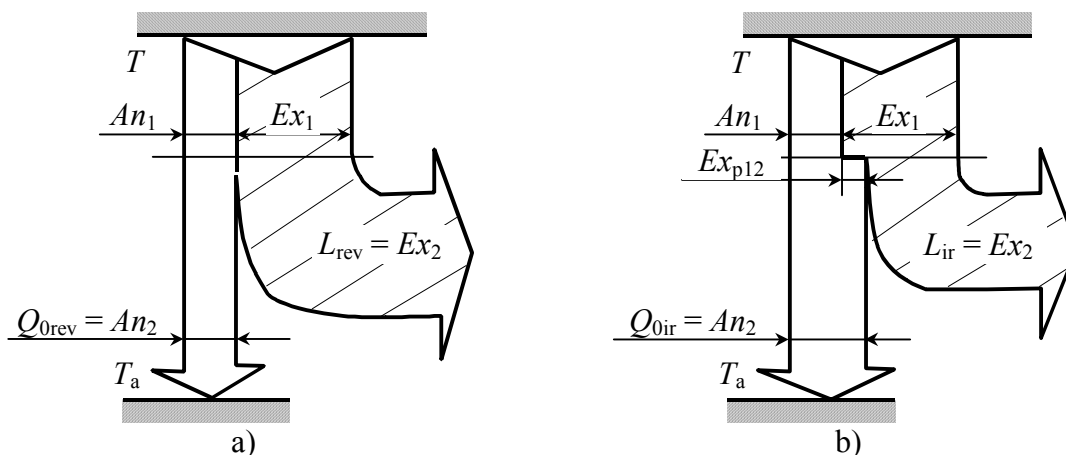


Figura 5.11: Diagrama fluxului exergetic - anergetic pentru mașina termică motoare reversibilă a) și ireversibilă b)

În ambele cazuri prezentate în figura 5.11, lucrul mecanic maxim posibil se obține atunci când temperatura sursei reci este egală cu temperatura mediului ambiant ($T_0 = T_a$), caz în care toată căldura cedată sursei reci conține numai anergie, ea nemaiputând fi transformată în nici o altă formă de energie, adică $Q_0 = An_2$ indiferent dacă procesul ciclic este reversibil sau ireversibil. Presupunând că ambele mașini termice reprezentate în figura 5.11 primesc aceeași căldură Q de la sursa caldă cu aceeași temperatură T , lucrul mecanic maxim este produs de către ciclul Carnot.

Presupunând că mașina termică reprezentată în figura 5.11 a) funcționează după ciclul Carnot, randamentul termic al acesteia este randamentul Carnot și se poate scrie:

$$\eta_C = \frac{L_{rev}}{Q} = \frac{Q - Q_{0rev}}{Q} = \frac{Ex_1}{Q} = \frac{Ex_2}{Q} \quad (5.56)$$

Pentru mașina termică motoare reprezentată în figura 5.11 b), care funcționează după un ciclu ireversibil, randamentul termic se poate scrie:

$$\eta_t = \frac{L_{ir}}{Q} = \frac{Q - Q_{0ir}}{Q} = \frac{Ex_2}{Q} = \frac{Ex_1 - Ex_{p12}}{Q} \quad (5.57)$$

Pierdere care poate fi redusă prin îmbunătățirea performanțelor mașinii termice motoare ireversibile este exergia pierdută Ex_{p12} , prin reducerea căreia randamentul termic se apropie de valoarea randamentului Carnot. Pentru a pune clar în evidență performanța mașinii termice motoare ireversibile este util să se definească *randamentul exergetic*, acesta fiind raportul dintre exergia produsă și cea primită, arătând astfel cât de mult lucru mecanic se obține efectiv din cel maxim disponibil teoretic, sau cât de mult se apropie mașina reală respectivă de cea ideală care lucrează după ciclul Carnot. Randamentul exergetic este atunci:

$$\eta_{ex} = \frac{Ex_2}{Ex_1} = \frac{Ex_1 - Ex_{p12}}{Ex_1} = 1 - \frac{Ex_{p12}}{Ex_1} \quad (5.58)$$

sau, ținând cont de relațiile 5.56 și 5.57:

$$\eta_{ex} = \frac{Ex_1 - Ex_{p12}}{Ex_1} \cdot \frac{Q}{Q} = \frac{\frac{Ex_1 - Ex_{p12}}{Q}}{\frac{Ex_1}{Q}} = \frac{\frac{Q - Q_{0ir}}{Q}}{\frac{Q - Q_{0rev}}{Q}} = \frac{\eta_t}{\eta_C} \quad (5.59)$$

TRANSMITEREA CĂLDURII

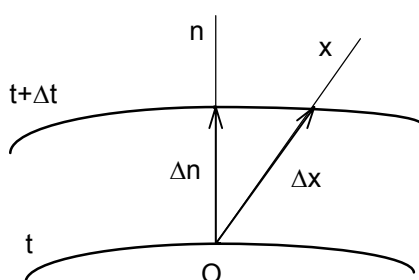
8.1 Noțiuni generale

Transmiterea căldurii reprezintă procesul de transmitere a energiei interne în interiorul aceluiași sistem termodinamic, din zonele cu temperaturi mai mari spre cele cu temperaturi mai mici sau între sisteme termodinamice diferite, aflate la temperaturi diferite. Căldura trece întotdeauna de la sistemul cu temperatură mai mare la cel cu temperatură mai mică (această afirmație reprezentând de fapt și un enunț al principiului al doilea al termodinamicii). Deoarece nu poate să apară decât în cazul unei diferențe finite de temperatură între sisteme și în interiorul unui sistem (care se află astfel într-o stare de neechilibru), procesul de transmitere a căldurii este întotdeauna ireversibil, având loc cu pierdere de exergie și cu generare de entropie.

În studiul proceselor de transmitere a căldurii este necesară cunoașterea temperaturii în interiorul sistemelor studiate. Valorile temperaturii sunt diferite în interiorul unui sistem, deci orice sistem care suferă un proces de transmitere a căldurii se află într-o stare de neechilibru. Temperatura fiind un parametru termic de stare, câmpul de temperatură este un câmp scalar, care depinde în general de coordonatele de poziție și de timp. Valoarea funcției temperatură în toate punctele sistemului, se numește *câmp de temperatură*. Câmpul de temperatură este un câmp scalar. Dacă temperatura unui anumit punct din spațiu variază în timp, câmpul de temperatură se numește *nestaționar*, iar dacă nu variază în timp, câmpul de temperatură se numește *staționar*.

Locul geometric al punctelor cu aceeași temperatură se numește *suprafață izotermică*. Suprafețele izoterme nu se intersectează niciodată (temperatura nu poate avea două valori diferite în același punct). Ele sunt suprafețe închise sau limitate de marginile sistemului.

Drumul cel mai scurt de la o suprafață izotermică de temperatură “ t ” la una alăturată de temperatură “ $t+\Delta t$ ” este cel măsurat pe direcția normalei la suprafață (în figura 8.1 se vede că $\Delta n < \Delta x$, oricare ar fi direcția Ox diferită de normala On). Limita raportului dintre Δt și Δn atunci când $\Delta n \rightarrow 0$ se numește *gradient de temperatură*.



Gradientul de temperatură are deci relația de definiție:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \bar{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n} = \text{grad } t = \nabla t \text{ [K/m]} \quad (8.1)$$

unde: $\bar{n}_0$ versorul normalei.

Gradientul de temperatură este un vector cu direcția normală la suprafața izotermică, având sensul pozitiv în sensul de creștere a temperaturii.

Figura 8.1: Suprafețe izoterme

Cercetările teoretice și experimentale au pus în evidență complexitatea proceselor de transmitere a căldurii. Din acest motiv studiul acestor procese se împarte în studiul mai multor fenomene simple de transmitere a căldurii: *conducția*, *convecția* și *radiația termică*. Legile de bază ale acestor moduri de transmitere a căldurii sunt complet diferite.

Conducția termică este mecanismul prin care căldura se transmite în interiorul unui corp indiferent de starea lui de agregare. Transmiterea căldurii prin conducție termică se realizează prin propagarea căldurii din aproape în aproape între particulele sistemului, pe baza ciocnirilor dintre acestea, cauzate de mișcarea lor liberă în interiorul corpului sau a sistemului.

Convecția termică este modul prin care căldura se transmite între un perete solid și un fluid (compresibil sau incompresibil) aflat în mișcare relativă față de acesta.

Radiația termică este de fapt radiația electromagnetică. Ea produce efecte termice în materiale atunci când energia termică radiată ajunge la nivelul materialului. Efectele termice semnificative sunt produse de radiația electromagnetică din spectrul infraroșu (lungimi de undă $\lambda = 0,36 \div 0,78 \mu\text{m}$) și din spectrul vizibil (lungimi de undă $\lambda = 0,78 \div 360 \mu\text{m}$).

8.2 Conducția termică

8.2.1 Legea conducției termice

Conducția termică reprezintă modul de transmitere a căldurii din aproape în aproape, la nivel microscopic, prin contact direct între particulele corpului. În metale, conducția termică are loc în principal prin difuzia electronilor liberi. În materiale solide cristalizate, conducția termică are loc prin vibrațiile elastice ale ionilor rețelei cristaline. În solide dielectrice amorse și în lichide, conducția termică are loc prin unde elastice provocate de schimbul de impulsuri dintre moleculele cu energie de agitație termică diferită. În gaze, conducția termică are loc în principal prin difuzia atomilor sau a moleculelor.

Fourier a demonstrat că întotdeauna cantitatea de energie care se transmite sub formă de căldură prin conducție termică este direct proporțională cu gradientul de temperatură, aria suprafeței prin care se transmite căldura și durata de desfășurare a procesului, conform ecuației 8.2, numită *Legea lui Fourier*:

$$d^2\overline{Q} = -\lambda \cdot \overline{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n} \cdot dA \cdot d\tau = -\lambda \cdot \nabla t \cdot dA \cdot d\tau \quad (8.2)$$

unde: $\overline{Q}$ [J] - căldura transmisă;
 A [m²] - aria secțiunii prin care se transmite căldura;
 τ [s] - timpul în care se transmite căldura;
 λ [W/m·K] - coeficientul de conducție termică al materialului la temperatura la care are loc schimbul de căldură.

Semnul "-" a fost introdus deoarece căldura se transmite în sensul descrescător al temperaturii, iar gradientul de temperatură este pozitiv în sensul creșterii temperaturii.

Fluxul de căldură, definit ca fiind căldura transmisă în unitatea de timp prin suprafața cu aria A , se notează cu $\overline{\dot{Q}}$ [W] și este:

$$\overline{\dot{Q}} = \frac{d\overline{Q}}{d\tau} = \int_A -\lambda \cdot \nabla t \cdot dA \quad (8.3)$$

Densitatea fluxului de căldură, definit ca fiind fluxul de căldură transmis prin unitatea de suprafață, se notează cu $\overline{\dot{q}}$ [W/m²] și este:

$$\overline{\dot{q}} = \frac{d\overline{\dot{Q}}}{dA} = -\lambda \cdot \nabla t \quad (8.4)$$

Deoarece în general interesează numai valorile (în modul), sensul de transmitere fiind evident, în relațiile de mai sus se poate renunța la scrierea în forma vectorială.

Factorul de proporționalitate λ din legea lui Fourier se numește *coeficient de conducție termică* sau *conductivitate termică* și este o caracteristică a materialului (care se determină pe cale experimentală), având ca unitate de măsură [W/ m²·K] sau [W/m²·°C]. În general valoarea sa variază

Coeficientul de conducție termică λ este o caracteristică de material, care în general cu starea de agregare, cu faza stării de agregare, cu presiunea, cu temperatura, cu axele de cristalizare, cu umiditatea, cu porozitatea etc. Pentru un material dat, cea mai importantă este

variația cu temperatura. Cercetările au arătat că, pentru majoritatea substanțelor, λ este o funcție liniară de temperatură.

Ca valori orientative:

- pentru gaze $\lambda = 0,006 \div 0,6$ [W/m² K] și crește cu temperatura;
- pentru lichide $\lambda = 0,09 \div 0,7$ [W/m² K] și în general scade cu temperatura;
- pentru materiale de construcții $\lambda = 0,02 \div 3$ [W/m² K] și crește cu temperatura, densitatea și umiditatea materialului;
- pentru metale $\lambda = 2 \div 414$ [W/m² K] și scade cu temperatura, dar mai ales în prezența impurităților, astfel încât aliajele au conductivitatea termică mult mai mică decât oricare dintre componente (de ex., la temperatura de 0°C, $\lambda_{Ag} = 414$ [W/m² K], $\lambda_{Cu} = 395$ [W/m² K], $\lambda_{Al} = 202$ [W/m² K]).

În general, dacă $\lambda < 0,2$ [W/m² K] materialul se numește *izolator termic*.

Valorile conductivităților termice pentru toate materialele utilizate în practică sunt determinate experimental și sunt date în tabele în literatura de specialitate.

8.2.2 Ecuațiile diferențiale ale conducției termice

Forma generală a ecuației diferențiale a conducției termice a fost stabilită de Fourier. Considerăm, într-un sistem cartezian de axe de coordonate, un element de volum $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, în care se transmite tridimensional căldură prin conducție. Fluxul elementar de căldură transmis prin acest element de volum se poate calcula ca suma fluxurilor elementare de căldură transmise în lungul celor trei axe de coordonate (Ox, Oy și Oz) și în cazul general (nestaționar) este:

$$d\dot{Q}_1 = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] \cdot dV \quad (8.5)$$

Dacă λ nu depinde de temperatură și de direcție ($\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ și $d\lambda/d\tau = 0$), rezultă:

$$d\dot{Q}_1 = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \cdot dV \quad (8.6)$$

sau:

$$d\dot{Q}_1 = -\text{div}(\lambda \cdot \text{grad } t) \cdot dV = -\lambda \cdot \text{div}(\text{grad } t) = -\lambda \cdot \nabla^2 t \cdot dV \quad (8.7)$$

Operatorul Laplace (∇^2) aplicat câmpului de temperatură are, în coordonate carteziene, forma:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (8.8)$$

și în coordonate cilindrice:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (8.9)$$

Fluxul elementar de căldură înmagazinat sau eliberat de volumul elementar dV din materialul respectiv, prin modificarea în timp a temperaturii sale, este:

$$d\dot{Q}_2 = \rho \cdot c \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \cdot dV \quad (8.10)$$

unde: ρ [kg/m³] - densitatea materialului;
 c [J/kg·K] - capacitatea calorică specifică a materialului.

Unele materiale pot conține surse interne de căldură (pozitive sau negative), de exemplu barele de combustibil nuclear sau unele roci conțin elemente radioactive care eliberează energie prin fisiune nucleară, conductori prin care circulă curent electric (efectul Joule – Lenz), reacții chimice etc. În ipoteza că sursele interne de căldură sunt uniform distribuite, fluxul de căldură furnizat de acestea se poate exprima prin relația:

$$d\dot{Q}_3 = \dot{q}_v \cdot dV \quad (8.11)$$

unde: $\dot{q}_v$ [W/m³] - densitatea volumică a fluxului surselor interne de căldură.

Ecuatia de bilanț energetic, conform principiului întâi al termodinamicii, este:

$$d\dot{Q}_1 + d\dot{Q}_2 = d\dot{Q}_3 \quad (8.12)$$

Înlocuind în relația 8.12 fluxurile elementare de căldură cu expresiile lor (din relațiile 8.7, 8.10 și 8.11) și rearanjând termenii, se obține:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c}$$

Raportul $\lambda/(\rho \cdot c)$ se notează cu “ a ”, se numește *difuzivitate termică* și are unitatea de măsură [m²/s]. Se obține astfel forma generală a ecuației diferențiale a conducției termice, numită *ecuația lui Fourier*:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} \quad (8.13)$$

În cazul cel mai general λ , ρ și c depind în principal de temperatură, dar și de presiune (mai ales pentru gaze). În plus, λ poate să aibă valori diferite după direcții diferite în spațiu, mai ales în cazul substanțelor solide cristaline.

În cazul unui câmp de temperatură staționar, se obține *ecuația lui Poisson*:

$$a \cdot \nabla^2 t + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c} = 0 \quad (8.14)$$

În cazul unui câmp de temperatură staționar fără surse interne de căldură, se obține *ecuația lui Laplace*:

$$a \cdot \nabla^2 t = 0 \quad (8.15)$$

Ecuatiile diferențiale ale conducției termice pot fi integrate analitic numai în anumite cazuri particulare ale unor procese relativ simple, dintre care unele sunt prezentate în continuare.

8.2.3 Conducția unidimensională în regim staționar prin pereți plani paraleli de extindere infinită fără surse interne de căldură

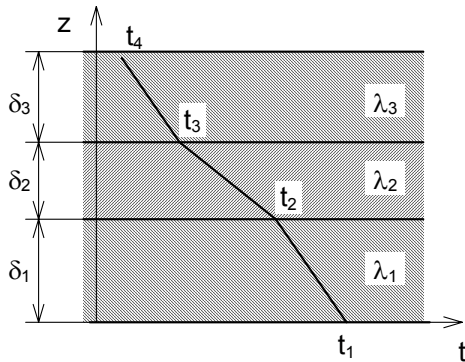


Figura 8.2: Conducția termică prin perete plan neomogen

Considerăm un perete plan orizontal de extindere infinită format din trei straturi de grosimi diferite ($\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$) formate din materiale cu proprietăți diferite ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$), de exemplu roci diferite (figura 8.2). Fluxul de căldură se transmite unidirecțional și câmpul de temperatură se modifică numai pe verticală. Temperaturile pe fețele stratelor sunt $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$.

În cazul în care nici un parametru nu se modifică în timp, câmpul de temperatură este staționar. În cazul în care un anumit strat conține substanțe radioactive, trebuie ținut cont de sursele interne de căldură corespunzătoare, conform legii lui Poisson. În caz contrar, conducția termică are loc conform legii lui Laplace scrisă pentru un câmp de temperatură unidimensional, care variază numai după axa z , derivatele parțiale de ordinul 2 în raport cu x și y fiind deci nule, iar cea în raport cu z trecând în derivată totală:

$$\frac{d^2 t}{dz^2} = 0 \quad (8.16)$$

Prin integrarea succesivă a ecuației 8.16 se obține:

$$\frac{dt}{dz} = C_1 \Leftrightarrow dt = C_1 \cdot dz$$

și $t = C_1 \cdot z + C_2$

Constanta de integrare C_1 se obține imediat din legea lui Fourier particularizată pentru procesul considerat:

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dz} \Rightarrow C_1 = \frac{dt}{dz} = -\frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (8.17)$$

Constanta de integrare C_1 se poate determina din condițiile la limită, de exemplu pentru stratul 1, la înălțimea $z = 0$ (pe fața inferioară a peretelui) temperatura are valoarea t_1 și rezultă:

$$C_2 = t_1 \quad (8.18)$$

Temperatura curentă t în stratul 1 variază deci liniar cu adâncimea, conform funcției:

$$t = t_1 - \frac{\dot{q}}{\lambda_1} \cdot z \quad (8.19)$$

Din a doua condiție la limită pentru stratul 1, respectiv că pe fața sa superioară (la adâncimea $z = \delta_1$) temperatura are valoarea t_2 , rezultă:

$$\dot{q} \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = t_1 - t_2 \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot (t_1 - t_2) \quad (8.20)$$

Prin analogie, se pot scrie direct aceste relații atât pentru stratul 2:

$$\dot{q} \cdot \frac{\delta_2}{\lambda_2} = t_2 - t_3 \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot (t_2 - t_3)$$

cât și pentru stratul 3:

$$\dot{q} \cdot \frac{\delta_3}{\lambda_3} = t_3 - t_4 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \cdot (t_3 - t_4)$$

Densitatea fluxului de căldură transmis prin conducție în regim staționar prin cele trei straturi diferite (fără surse interne de căldură) este evident constantă. Însușind relațiile din stânga corespunzătoare celor trei strate și regrupând termenii rezultă:

$$\dot{q} = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} = \frac{t_1 - t_4}{R_{ech}}$$

sau generalizând pentru un perete compus din n straturi diferite:

$$\dot{q} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{R_{ech}} \quad (8.21)$$

unde: R_{ech} [K/W] - rezistența echivalentă la conducția termică.

8.2.4 Conducția unidimensională în regim staționar prin pereți cilindrici de lungime infinită fără surse interne de căldură

În cazul unui perete cilindric, căldura se transmite prin conducție de la suprafața interioară a peretelui spre cea exterioară sau invers. Temperatura variază numai în direcție radială, astfel încât în coordonate cilindrice câmpul de temperatură este unidimensional, suprafețele izoterme fiind suprafețe cilindrice coaxiale.

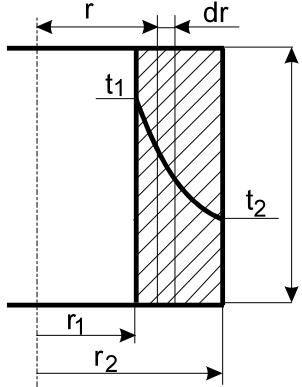


Figura 8.3: Conducția prin perete cilindric

Considerăm un perete cilindric omogen de lungime infinită (practic de lungime $l \gg r_2$), cu razele suprafețelor interioară și exterioară $r_1 < r_2$, cu temperaturile pe aceste suprafețe $t_1 > t_2$ (figura 8.3). Peretele fiind omogen, materialul din care este construit are aceleași proprietăți în tot volumul ($\lambda = \text{const.}$). În plus, considerăm că peretele nu conține surse interne de căldură și că regimul termic este staționar.

Fluxul de căldură transmis prin perete și funcția de variație a temperaturii se pot determina prin integrarea legii lui Fourier și a ecuației lui Laplace scrise în coordonate cilindrice pentru acest caz particular. Conform legii lui Fourier, fluxul de căldură transmis printr-un strat cilindric de rază r și grosime dr , delimitat de două suprafețe izoterme, este:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dt}{dr}$$

Prin integrare, se obține:

$$t = -\frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln r + C \quad (8.23)$$

Constanta de integrare C se determină din condițiile de contur. La raza $r = r_1$ (pe suprafața interioară a peretelui) temperatura este $t = t_1$ și în acest caz:

$$t_1 = \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln r_1 + C \quad (8.24)$$

La raza $r = r_2$ (pe suprafața interioară a peretelui) temperatura este $t = t_2$, deci:

$$t_2 = \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot \lambda \cdot l} \cdot \ln r_2 + C \quad (8.25)$$

Eliminând constanta de integrare C din ecuațiile 8.24 și 8.25 se obține fluxul total de căldură transmis prin conducție prin peretele cilindric considerat:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot l \cdot (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (8.26)$$

Deoarece la același flux de căldură transmis prin suprafața exterioară și interioară, ariile suprafețelor sunt diferite, densitatea fluxului de căldură este diferită la cele două raze:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot r_1 \cdot l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{r_1}{\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (8.27)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\dot{Q}}{2\pi \cdot r_2 \cdot l} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{r_2}{\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (8.28)$$

Evident $\dot{q}_1 > \dot{q}_2$. Din acest motiv, pentru conducția prin pereți cilindrici se introduce noțiunea de *densitate liniară de flux de căldură* ($\dot{q}_l$ [W/m]):

$$\dot{q}_l = \frac{\dot{Q}}{l} = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{R_{ech}} \quad (8.29)$$

unde: R_{ech} [m·K/W] - rezistența la conducție termică pe metru liniar de perete cilindric.

Temperatura curentă t în perete, la raza curentă, r este:

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (8.30)$$

În concluzie, variația temperaturii în peretele cilindric cu λ constant este logaritmică. Dacă λ nu este constant cu temperatura (aceasta se întâmplă la variații mari ale temperaturii în perete), trebuie adoptată o lege de variație liniară a coeficientului de conducție, care conduce la modificarea expresiilor fluxului de căldură și a temperaturii curente în perete:

$$\dot{q}_l = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_0 \cdot \left[1 + \frac{b}{2} \cdot (t_1 + t_2)\right]} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_m|_{t_1}^{t_2}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (8.31)$$

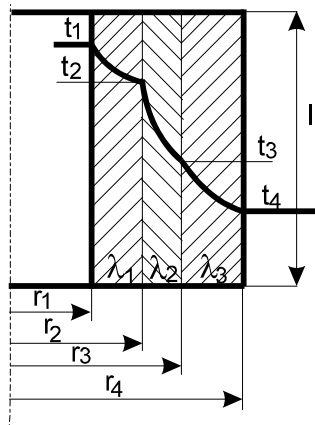
și respectiv:

$$t = \frac{1}{b} \cdot \left[\sqrt{1 + 2b \left(\frac{b}{2} \cdot t_1^2 + t_1 - \frac{\dot{q}_l}{2\pi \cdot \lambda_0} \cdot \ln \frac{r}{r_1} \right)} - 1 \right] \quad (8.32)$$

În unele cazuri, de exemplu conducte izolate, pereții cilindrici sunt neomogeni, fiind formați din cel puțin trei straturi diferite (conducta de oțel, izolația termică și protecția mecanică), ale căror proprietăți termodinamice sunt diferite.

Considerăm un perete cilindric vertical de lungime infinită compus din trei straturi diferite, cu contact termic perfect între ele. Razele, coeficienții de conducție termică și temperaturile straturilor sunt indicate în figura 8.4.

În regim termic staționar, densitatea liniară a fluxului de căldură ($\dot{q}_l$) este constantă în toate cele trei straturi, astfel încât se poate scrie:



$$\dot{q}_l = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi \cdot (t_2 - t_3)}{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} = \frac{\pi \cdot (t_3 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} \quad (8.33)$$

Rezultă de aici următoarele diferențe de temperatură:

$$t_1 - t_2 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}$$

$$t_2 - t_3 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2}$$

$$t_3 - t_4 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3} = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}$$

Figura 8.4:
Conducția prin pereții
cilindrici neomogeni

Adunând cele trei relații anterioare și rearanjând termenii, rezultă densitatea liniară a fluxului de căldură:

$$\dot{q}_l = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad (8.34)$$

Pentru n straturi din materiale diferite, densitatea liniară a fluxului de căldură este:

$$\dot{q}_l = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_{n+1})}{R_{ech}} \quad (8.35)$$

Temperaturile suprafețelor de contact între straturile diferite sunt:

$$t_2 = t_1 - \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} \quad (8.36)$$

$$t_3 = t_4 + \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} \quad (8.37)$$

Funcția de variație a temperaturii în fiecare strat este de asemenea logaritmică, de forma relației 8.30.

8.2.5 Trecerea căldurii prin pereți cilindrici

Un perete omogen sau neomogen separă de obicei două fluide cu temperaturi diferite t_{f1} și t_{f2} . Căldura se transmite de la un fluid la altul prin intermediul peretelui. Dacă în perete căldura se transmite prin conducție, de la primul fluid la perete și de la perete la al doilea fluid căldura se transmite prin convecție și radiație. Acest proces complex de transmitere a căldurii se numește *trecere de căldură*.

Fluxul de căldură transmis prin convecție și radiație de la fluidul cald cu temperatura t_{f1} la peretele cu temperatura t_1 , se poate exprima sub forma:

$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot A_1 \cdot (t_{f1} - t_1) \quad (8.38)$$

unde: $\alpha_1 = \alpha_{1c} + \alpha_{1r}$ [W/m²·K] - coeficient de transmitere a căldurii de la fluid la perete;

α_{1c} - coeficientul de convecție (definit în capitolul 8.3);

α_{1r} - coeficientul echivalent de transmitere a căldurii prin radiație.

Același flux de căldură va fi transmis prin conducție prin perete, conform relațiilor stabilite anterior, iar de la perete la fluidul mai rece, conform relației (similare relației 8.38):

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot A_2 \cdot (t_2 - t_{f2}) \quad (8.39)$$

unde: $\alpha_2 = \alpha_{2c} + \alpha_{2r}$

În figura 8.5 este reprezentat un perete cilindric neomogen, format din două straturi cu conductivități termice diferite ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), care separă două fluide cu temperaturile $t_{f1} > t_{f2}$. În regim staționar, densitatea liniară a fluxului de căldură transmis de la fluidul cu temperatura t_{f1} la perete este constantă și egală cu cea a fluxului de căldură transmis prin conducție prin straturile peretelui și cu cea a fluxului de căldură transmis de la perete la fluidul cu temperatura t_{f2} . Pe baza relațiilor prezentate anterior, densitatea liniară a fluxului de căldură este:

$$\dot{q}_l = 2\pi \cdot r_1 \cdot \alpha_1 \cdot (t_{f1} - t_1) = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi \cdot (t_2 - t_3)}{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} = 2\pi \cdot r_3 \cdot \alpha_2 \cdot (t_3 - t_{f2}) \quad (8.40)$$

Diferențele de temperatură sunt:

$$t_{f1} - t_1 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \cdot r_1}$$

$$t_1 - t_2 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$t_2 - t_3 = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}$$

$$t_3 - t_{f2} = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot r_3}$$

Prin adunarea acestor relații se obține:

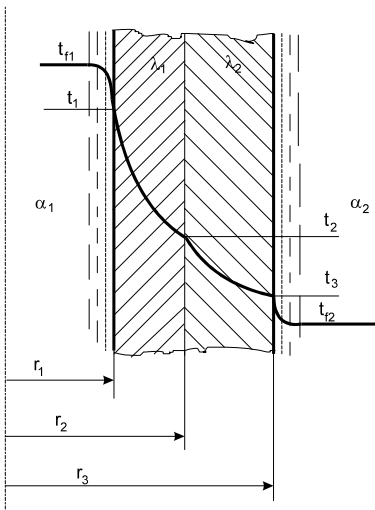


Figura 8.5: Trecerea căldurii prin pereții cilindrici

$$t_{f1} - t_{f2} = \frac{\dot{q}_l}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1 \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot r_3} \right) \quad (8.41)$$

sau:

$$\dot{q}_l = \frac{\pi \cdot (t_{f1} - t_{f2})}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3}} \quad (8.42)$$

Pe de altă parte, densitatea liniară a fluxului de căldură $\dot{q}_l$ se poate scrie:

$$\dot{q}_l = K_l \cdot \pi \cdot (t_{f1} - t_{f2}) \quad (8.43)$$

Din această relație rezultă coeficientul liniar global de trecere de căldură (K_l):

$$K_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_{n+1}}} \quad (8.44)$$

Temperaturile curente în interiorul peretelui se calculează la fel ca în cazul transmiterii căldurii prin conducție.

8.3 Convecția termică

Prin *convecție termică* se înțelege transmiterea căldurii între un fluid în mișcare și un perete care delimitează mișcarea fluidului. Pentru producerea schimbului de căldură este necesară existența unei diferențe finite de temperatură între fluidul în mișcare și perete. În continuare se va nota cu t_f - temperatura fluidului și cu t_p - temperatura peretelui.

Când mișcarea fluidului se produce liber, ca urmare a diferențelor de densitate datorate diferenței de temperatură din masa fluidului, procesul se numește *convecție liberă*, iar când mișcarea fluidului se produce forțat, datorită diferențelor de presiune create în mod artificial, procesul se numește *convecție forțată*. La convecția liberă, curentul predominant de fluid se produce pe direcția verticală, pe când la convecția forțată poate avea orice direcție.

Indiferent de natura mișcării fluidului, se deosebesc două regimuri hidrodinamice de curgere: laminar și turbulent. La curgerea laminară, spre deosebire de cea turbulentă, viteza de curgere nu are componente perpendiculare pe direcția de curgere.

Indiferent de caracterul curgerii și de natura mișcării fluidului, datorită forțelor de atracție moleculară, la perete se formează un strat aderent de fluid, care se numește *strat limită laminar*. În acest strat limită, curgerea este întotdeauna laminară, iar viteza variază liniar, de la zero la perete până la o viteză oarecare. Prin stratul limită laminar transmiterea căldurii se realizează numai prin conducție în fluid.

O importanță deosebită în convecția termică o are coeficientul de conducție termică al fluidului λ_f și grosimea stratului limită laminar δ . Grosimea stratului limită laminar depinde de proprietățile fizice ale fluidului, deci de natura fluidului, dar în măsură mult mai mare depinde de caracterul curgerii. La curgerea turbulentă, schimbul de căldură între fluid și perete este mult mai intens decât la curgerea laminară.

Pentru calculul căldurii schimbate prin convecție între un perete cu aria A , având temperatura t_p și un fluid cu temperatura t_f , neinfluențată de temperatura peretelui, în timpul τ , se utilizează *legea lui Newton*:

$$Q = \alpha \cdot A \cdot (t_p - t_f) \cdot \tau \quad (8.45)$$

unde: α [W/m²·K] - *coeficient de transmitere a căldurii prin convecție (coeficient de convecție)*

Această formulă este foarte simplă ca formă. În realitate însă, coeficientul de convecție α este o funcție complicată și dificil de determinat, depinzând de multe mărimi fizice: viteză, densitate, temperatură, presiune, capacitate calorică specifică, viscozitate, coeficientul de conducție termică. Toate aceste mărimi variază în lungul curentului datorită schimbului finit de căldură, care duce în special la modificarea temperaturii, atât în fluid cât și în stratul limită. În cazul unui regim nestaționar de schimb de căldură aceste mărimi variază și cu timpul. Pentru determinarea coeficientului de convecție se face apel la ecuațiile diferențiale care modelează fenomenul de convecție termică.

Transmiterea căldurii prin convecție depinde de mișcarea fluidului, de modul cum se transmite căldura prin conducție prin straturile de fluid și de condițiile de contur. Fluidele reale sunt fluide vâscoase, deci pentru descrierea mișcării lor, pe lângă ecuațiile de continuitate, se folosesc și ecuațiile Navier-Stokes. Conductivitatea prin straturile de fluid este descrisă de ecuația lui Fourier generalizată pentru fluide în mișcare. Ecuația de contur ia în considerare modul în care se produce transferul de căldură între fluid și perete prin stratul limită.

Ecuația de continuitate se exprimă astfel:

$$\rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + w_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \quad (8.46)$$

Termenii de forma $\left(w_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)$ reprezintă, evident, modificarea densității fluidului pe drumul ($dx = w_x \cdot d\tau$), provocată de fenomenul de convecție, pe când termenul $\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right)$ reprezintă modificarea locală a densității. Modificarea în timp sau în spațiu a densității fluidului se poate produce ca urmare a modificării presiunii sau temperaturii. Suma celor două modificări ale densității reprezintă variația totală a densității, numită și *diferențiala substanțială* a densității, care se scrie sub forma:

$$\frac{D\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (8.47)$$

Cu această notație, ecuația de continuitate pentru fluide compresibile devine:

$$\frac{D\rho}{d\tau} = -\rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad (8.48)$$

sau: $\frac{D\rho}{d\tau} = -\rho \cdot \text{div } w \quad (8.49)$

Ecuația de mișcare a fluidelor vâscoase este:

$$\frac{Dw}{d\tau} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \nu \cdot \nabla^2 w + g \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (8.50)$$

unde: $\beta = \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt}$ [K⁻¹] - coeficientul de dilatare volumică.

Pentru un fluid compresibil, în partea dreaptă a relației mai apare un termen de frecare, datorită mișcărilor suplimentare, condiționate de deformarea elementului de masă din cauza modificării densității. Cu acest termen ecuația de mișcare devine:

$$\frac{Dw}{d\tau} = \frac{\partial w}{\partial \tau} + w \cdot \text{grad } w = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \nu \cdot \left(\nabla^2 w + \frac{1}{3} \cdot \text{grad div } w \right) + g \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (8.51)$$

unde: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ [m²/s] - viscozitatea cinematică a fluidului.

Ecuația conducției termice pentru fluide în mișcare pune în evidență modul de transmitere a căldurii prin conducție în fluidul aflat în mișcare. Într-un mediu staționar, ecuația conducției termice în lipsa surselor interne de căldură, rezultă astfel:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = a \cdot \nabla^2 t \quad (8.52)$$

În cazul unui fluid în mișcare, temperatura nu depinde numai de timp, cum s-a scris în ecuația lui Fourier, ci și de spațiu. Din această cauză Kirchhoff a completat ecuația lui Fourier, introducând variația substanțială de temperatură. În cazul fluidelor în mișcare, se poate scrie:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (8.53)$$

sau: $\frac{\partial t}{\partial \tau} + w \cdot \text{grad } t = a \cdot \nabla^2 t \quad (8.54)$

sau: $\frac{Dt}{d\tau} = a \cdot \nabla^2 t \quad (8.55)$

Pentru diferențe mari de presiune și pentru viteze mari, Rayleigh a completat această ecuație cu un termen care reprezintă variația substanțială de presiune ($Dp/d\tau$) și cu un termen prin care se ia în considerare lucrul mecanic de frecare W_f cauzat de viscozitatea fluidului.

Ecuația lui Rayleigh, ținând cont și de sursele interne de căldură, este:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{Dp}{d\tau} + \nabla^2 t + \frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot W_f + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} \quad (8.56)$$

sau: $\frac{\partial t}{\partial \tau} + W \cdot \text{grad } t = \frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + w \cdot \text{grad } p \right) + a \cdot \nabla^2 t + \frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot W_f + \frac{\dot{q}_v}{\rho \cdot c_p} \quad (8.57)$

În regim staționar dispar derivatele de forma $\partial/\partial \tau$, iar dacă vitezele sunt moderate se pot neglija și variațiile de presiune și lucrul mecanic de frecare, rezultând următoarea ecuație:

$$W \cdot \text{grad } t = a \cdot \nabla^2 t \quad (8.58)$$

Ecuația de contur ia în considerare modul în care se transmite căldura de la perete la fluidul în mișcare prin stratul limită laminar, considerat ca fiind egal cu stratul limită termic. Prin acest strat, definit ca un strat de fluid aderent la perete, căldura se transmite numai prin conducție. În regim staționar, se poate scrie egalitatea dintre căldura transmisă prin conducție prin stratul limită și căldura transmisă fluidului în mișcare:

$$Q = \alpha \cdot A \cdot (t_p - t_f) \cdot \tau = -\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_p \cdot \tau \quad (8.59)$$

$$\text{sau: } \dot{q} = \alpha \cdot (t_p - t_f) = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_p \quad (8.60)$$

unde: α [W/m²·K] - coeficientul de convecție;
 λ [W/m·K] - coeficientul de conducție termică a fluidului;
 $-\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_p$ [K/m] - gradientul de temperatură în fluid la perete.

Spre deosebire de ecuația lui Biôt, în această ecuație intervin mărimile fluidului, nu ale materialului peretelui.

8.3.1 Teoria similitudinii

Stabilirea ecuațiilor diferențiale care descriu un fenomen fizic este în general posibilă, chiar în cazul fenomenelor foarte complexe. În unele situații particulare se pot accepta ipoteze simplificatoare care permit integrarea aproximativă prin metode numerice sau foarte rar chiar integrarea analitică exactă. Rezolvarea analitică însă, a acestor ecuații este în majoritatea cazurilor imposibilă. Din această cauză, pentru stabilirea unor relații cantitative între mărimile care caracterizează fenomenul trebuie să se facă apel la cercetarea experimentală. Există însă fenomene fizice care nu pot fi studiate pe această cale, în mărime naturală, din cauza dimensiunilor prea mari ale instalației în care se produce fenomenul respectiv.

În practică se utilizează foarte des relații de calcul stabilite experimental prin studierea unui model la dimensiuni de laborator care este similar cu un grup sau cu o clasă de fenomene întâlnite în practică. Pentru ca modelul să fie similar cu fenomenele reale, el trebuie să îndeplinească condițiile de similitudine (asemănare) geometrică (proporționalitatea lungimilor și egalitatea unghiurilor) și în plus similitudinea tuturor celorlalte mărimi care caracterizează procesul. Mărimile care caracterizează un proces sunt mărimi fundamentale: lungime, masă, timp, temperatură, etc. (cele care definesc sistemul de unități de măsură) și mărimi derivate obținute din cele fundamentale (de exemplu viteza = spațiu / timp).

La construirea unui model, scara de realizare a mărimilor fundamentale se poate alege pentru fiecare mărime în parte. Pentru mărimile fundamentale, de exemplu lungime, se poate scrie:

$$c_l = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'_n}{l_n} = \dots \quad (8.63)$$

unde: c_l - factorul de scară al dimensiunii liniare
 l' - dimensiunile liniare de la model
 l - dimensiunile liniare de la original

Pentru mărimile derivate, factorii de scară nu pot fi aleși arbitrar, ei rezultând din factorii de scară ai mărimilor fundamentale, pe baza relațiilor de definiție ale mărimilor respective. De exemplu factorul de scară pentru viteze este:

$$c_w = \frac{w'}{w} = \frac{\frac{l'}{\tau'}}{\frac{l}{\tau}} = \frac{l'}{l} \cdot \frac{\tau}{\tau'} = \frac{l'}{l} \cdot \frac{1}{c_\tau} = \frac{c_l}{c_\tau} \quad (8.64)$$

unde: c_l - factorul de scară pentru lungime;
 c_τ - factorul de scară pentru timp;
 c_w - factorul de scară pentru viteză.

Din relația 8.64, prin regrupare, se poate determina o relație de egalitate între mărimile de la original și cele de la model:

$$\frac{w'}{w} = \frac{\frac{l'}{\tau'}}{\frac{l}{\tau}} \Leftrightarrow \frac{w' \cdot \tau'}{l'} = \frac{w \cdot \tau}{l} \quad (8.65)$$

Se observă că, dacă se cunosc mărimile ce caracterizează un fenomen și ecuațiile care îl modelează, chiar și în formă diferențială, se pot obține mărimi adimensionale care caracterizează atât fenomenul respectiv, cât și modelul. Dacă o astfel de mărime are aceeași valoare pentru model și fenomenul real, atunci întotdeauna acestea sunt asemenea. Astfel de mărimi se numesc *invarianți* sau *criterii de similitudine* și prin definiție sunt adimensionale.

Teoria dezvoltată pentru modelarea fenomenelor fizice, numită *teoria similitudinii*, are la bază trei teoreme:

Teorema 1: Pentru două sisteme fizice asemenea se pot deduce invarianți sau criterii de similitudine care au aceeași valoare la ambele sisteme.

Teorema 2: (Teorema π sau Teorema Buckingham) Soluția integrală a ecuațiilor diferențiale poate fi reprezentată ca o funcție de invarianții care caracterizează fenomenul.

Teorema 3: (Teorema lui Chirpicev și Guhman) Condiția necesară și suficientă pentru ca două fenomene fizice să fie asemenea constă în asemănarea condițiilor de unicitate în care se desfășoară fenomenul și în identificarea invarianților deduși din condițiile de unicitate la cele două fenomene.

Pentru orice fenomen fizic de pot stabili un număr mai mare sau mai mic de criterii de similitudine, în funcție de numărul de mărimi fizice care îl caracterizează. O ecuație determinată experimental, pe model, între invarianții care caracterizează fenomenul, se numește *ecuație criterială* și este valabilă pentru toate fenomenele reale similare cu modelul.

8.3.2 Criterii de similitudine utilizate în transmiterea căldurii

Conducția în regim staționar

Ecuația diferențială care descrie fenomenul de conducție termică este ecuația lui Fourier. Fără surse interne de căldură, ecuația pentru fenomenul original devine:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \quad (8.66)$$

Ecuația de contur este ecuația lui Biôt:

$$\alpha \cdot \Delta t = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x' \rightarrow 0} \quad (8.67)$$

În cazul modelului, ecuațiile devin:

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} = a' \cdot \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} \right) \quad (8.68)$$

$$\alpha' \cdot \Delta t' = -\lambda' \cdot \left(\frac{\partial t'}{\partial x'} \right)_{x' \rightarrow 0} \quad (8.69)$$

Factorii de scară pentru mărimile care intervin în aceste relații sunt:

$$c_t = \frac{t'}{t}; c_\tau = \frac{\tau'}{\tau}; c_a = \frac{a'}{a}; c_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha}; c_\lambda = \frac{\lambda'}{\lambda};$$

$$c_z = c_y = c_x = c_l = \frac{l'}{l}$$
(8.70)

Din condiția ca ecuația lui Fourier pentru model să fie identică cu cea pentru original rezultă criteriile de similitudine Fourier (Fo) și Biôt (Bi):

$$\frac{a \cdot \tau}{l^2} = \frac{a' \cdot \tau'}{l'^2} = const. = Fo$$
(8.71)

$$\frac{\alpha \cdot l}{\tau} = \frac{\alpha' \cdot l'}{\tau'} = const. = Bi$$
(8.72)

Acestea, împreună cu un invariant de natură geometrică (x/x_0) - pentru precizarea poziției în corp - formează ecuația criterială pentru conducția termică, în cazul în care temperatura mediului ambiant este nulă:

$$\frac{t}{t_0} = \Phi \left(Fo, Bi, \frac{x}{x_0} \right)$$
(8.73)

unde: x_0 - mărime geometrică determinantă;
 t_0 - temperatura inițială în punctul respectiv.

Convecția termică

Fenomenul de convecție depinde și de *condițiile de contur*:

- condițiile geometrice - caracterizează forma și dimensiunile corpului ce limitează fluidul considerat;
- condițiile fizice - caracterizează proprietățile fizice ale mediului;
- condițiile de margine (sau la limită) - țin seama de modul transferului de căldură la suprafețele marginale ale corpului;
- condițiile de timp - caracterizează transferul de căldură în timp.

Pentru a stabili criteriile de similitudine și ecuațiile criteriale pentru convecția termică se consideră cazul cel mai complet și anume cazul în care apare atât curgere forțată, cât și liberă (acesta apare la curgerea prin țevi verticale). Se consideră două tuburi verticale, asemenea geometric, prin care circulă două fluide cu proprietăți fizice diferite.

În urma unui calcul analog cu cel din cazul precedent, se determină criteriile de similitudine:

- criteriul de similitudine Euler:

$$\frac{p_1}{\rho_1 \cdot w_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 \cdot w_2^2} = const. = Eu$$
(8.74)

- criteriul de similitudine Reynolds (determinant în convecția forțată):

$$\frac{w_1 \cdot l_1}{\nu_1} = \frac{w_2 \cdot l_2}{\nu_2} = const. = Re$$
(8.75)

- criteriul de similitudine Grasshoff (determinant în convecția liberă):

$$\frac{g_1 \cdot \beta_1 \cdot \Delta t_1 \cdot l_1^3}{\nu_1^2} = \frac{g_2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta t_2 \cdot l_2^3}{\nu_2^2} = const. = Gr$$
(8.76)

- criteriul de similitudine Peclet:

$$\frac{w_1 \cdot l_1}{a_1} = \frac{w_2 \cdot l_2}{a_2} = \text{const.} = Pe \quad (8.77)$$

- criteriul de similitudine Nusselt:

$$\frac{\alpha_1 \cdot l_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 \cdot l_2}{\lambda_2} = \text{const.} = Nu \quad (8.78)$$

Deoarece în majoritatea cazurilor practice fluidele pot fi considerate incompresibile, din cauza vitezelor de curgere destul de mici, în ele nu se produc variații sensibile de presiune și densitate. Ca urmare, în cazul considerat, criteriul de similitudine Euler (Eu) nu joacă un rol deosebit în transmiterea căldurii și, deci, nu va intra în ecuațiile de invarianți.

Pe lângă invarianții prezentați până acum, se pot folosi și alții, proveniți din combinarea acestora. Foarte frecvent se folosește criteriul de similitudine Prandtl, care are avantajul că nu conține decât proprietățile fizice ale fluidelor:

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{w \cdot l \cdot \nu}{a \cdot w \cdot l} = \frac{\nu}{a} \quad (8.79)$$

Un alt criteriu de similitudine mult folosit este Stanton (St), definit astfel:

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha \cdot l \cdot \nu \cdot a}{\lambda \cdot w \cdot l \cdot \nu} = \frac{\alpha \cdot a}{\lambda \cdot w} = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\rho \cdot c \cdot \lambda \cdot w} = \frac{\alpha}{\rho \cdot c \cdot w} \quad (8.80)$$

În cercetările experimentale de transmitere a căldurii prin convecție, se urmărește determinarea coeficientului de convecție care intră numai în expresiile criteriilor de similitudine Nusselt sau Stanton.

O ecuație criterială care ține cont atât de curgerea forțată, cât și de cea liberă este de forma:

$$Nu = f(Fo, Re, Pr, Gr) \quad (8.81)$$

$$\text{sau: } Nu = f(Fo, Re, Pe, Gr) \quad (8.82)$$

$$\text{sau: } St = f(Fo, Re, Pr, Gr) \quad (8.83)$$

$$\text{sau: } St = f(Fo, Re, Pe, Gr) \quad (8.84)$$

În regim termic staționar, criteriul de similitudine Fo nu are nici o importanță, deci va dispărea din ecuațiile criteriale. La curgerea turbulentă forțată se poate neglija influența mișcării libere. În acest caz, criteriul de similitudine Gr dispăre din ecuațiile criteriale. Pentru acest caz, în regim termic staționar, ecuația criterială va fi de forma:

$$Nu = f(Re, Pr) \quad \text{sau} \quad Nu = f(Re, Pe) \quad \text{sau} \quad (8.85)$$

$$St = f(Re, Pr) \quad \text{sau} \quad St = f(Re, Pe) \quad (8.86)$$

Metoda similitudinii poate fi extinsă și la corpuri care nu respectă asemănarea geometrică, dacă sunt corpuri de același fel (țevi având raporturi diferite între lungimi și diametre). În acest caz, în ecuațiile criteriale trebuie să apară rapoartele l/d . Trebuie însă precizat cu mare acuratețe domeniul de valabilitate al acestor relații, deci care sunt valorile limită ale criteriilor de similitudine care intervin în relație, între care relația se poate folosi.

Expresiile matematice ale ecuațiilor criteriale se determină experimental. Pentru convecția liberă cu pereți plani sau cilindrici, verticali sau orizontali, se utilizează cel mai des ecuația lui Miheev:

$$Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)_m^n \quad (8.87)$$

Gr și Pr se calculează pentru temperatura medie în stratul limită termic, $t_m = (t_p + t_f)/2$, iar constantele C și n sunt date în tabele (tabelul 8.1) în funcție de regimul dinamic al curgerii libere a fluidului în apropierea peretelui, care este caracterizat de valoarea produsului GrPr.

Tabelul 8.1: Constantele C și n pentru ecuația lui Miheev

$Gr \cdot Pr$	regim	C	n
$1 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$	laminar	1,18	1/8
$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	tranzitoriu	0,54	1/4
$2 \cdot 10^7 \div 1 \cdot 10^{13}$	turbulent	0,135	1/3

8.4 Radiația termică

Spre deosebire de conducție și convecție, care au loc prin intermediul unui suport material, radiația termică emisă de un corp și receptată de un alt corp este independentă de temperatura mediului prin care se transmite și nu necesită un suport material.

Radiația termică este acea parte a radiației electromagnetice care produce efecte termice semnificative în corpurile cu care ajunge în contact. Radiația termică reprezintă un domeniu relativ îngust din spectrul total al radiației electromagnetice și anume spectrul vizibil cu lungimi de undă de $0,36 \div 0,78 \mu m$ și spectrul infraroșu cu lungimi de undă de $0,78 \div 360 \mu m$.

Fiecare corp emite continuu radiație electromagnetică la orice temperatură. Din fluxul total de căldură $\dot{Q}$ care ajunge prin radiație pe suprafața unui corp, o parte $\dot{Q}_A$ este absorbită, o parte $\dot{Q}_R$ este reflectată, iar restul $\dot{Q}_T$ trece prin corp fără a produce efecte termice. Este atunci evidentă următoarea relație, cunoscută și sub numele de *prima lege a lui Kirchhoff pentru radiația termică*:

$$A + R + T = 1 \quad (8.88)$$

unde: $A = \frac{\dot{Q}_A}{\dot{Q}}$ - factor de absorbție;

$R = \frac{\dot{Q}_R}{\dot{Q}}$ - factor de reflecție;

$T = \frac{\dot{Q}_T}{\dot{Q}}$ - factor de transparență.

Se pot imagina următoarele cazuri limită în ceea ce privește comportarea corpurilor față de radiații termice:

- dacă $A = 1$, deci $T = 0$ și $R = 0$, atunci întreaga cantitate de radiație incidentă este absorbită de corp, producând încălzirea acestuia și corpul se numește *corp negru*;
- dacă $T = 1$, deci $A = 0$ și $R = 0$, atunci întreaga cantitate de radiație incidentă trece prin corp fără a produce efecte termice și corpul se numește *corp transparent*;
- dacă $R = 1$, deci $T = 0$ și $A = 0$, atunci întreaga cantitate de radiație incidentă este reflectată de corp și corpul se numește *corp alb* dacă reflexia este difuză și *corp lucios* dacă unghiul de reflexie egal cu cel de incidență.

În natură nu există corpuri care să corespundă integral nici unuia din cele trei cazuri limită. Valorile A , R , și T depind de natura corpului, de forma acestuia, de temperatura lui și de lungimea de undă a radiațiilor incidente. Majoritatea corpurilor se comportă selectiv față de radiațiile termice, adică radiațiile cu o anumită lungime de undă sunt absorbite total sau parțial, iar pentru alte lungimi de undă corpul este transparent, parțial transparent sau reflectant.

Corpurile colorate sau selective reflectă radiația termică cu o anumită lungime de undă. În sens mai larg, prin "culoare" se înțelege lungimea de undă a radiațiilor termice pe care le reflectă corpul.

Corpurile cenușii absorb aceeași parte din energia fiecărei unde incidente într-un interval de lungimi de undă. Pe un domeniu mare de lungimi de undă nu se poate vorbi de corpuri cenușii, ci numai de corpuri selective. Există totuși multe corpuri solide sau lichide a căror comportare este destul de uniformă pe întreg domeniul radiațiilor termice.

Apa în straturi subțiri este transparentă pentru radiațiile luminoase, absoarbe aproape în întregime radiațiile infraroșii, iar în straturi groase absoarbe în întregime radiația termică.

8.4.1 Legile radiației termice

Legea lui Planck

Se pune problema de a determina legătura dintre energia emisă prin radiație, temperatura corpului care emite și lungimea de undă pe care este emisă. Se definește *intensitatea de radiație* (I_λ [W/m^2]) ca fiind fluxul de energie emis de unitatea de suprafață a corpului pe o anumită lungime de undă λ [m]. Corpul care la o anumită temperatură emite pe unitatea de suprafață cea mai mare cantitate de energie este corpul negru. Dependența intensității de radiație a corpului negru de temperatură și lungimea de undă este dată de **legea lui Planck** sub forma:

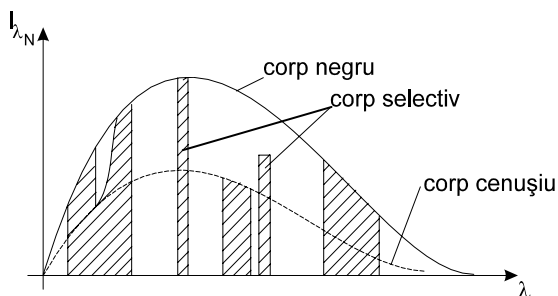


Figura 8.6: Intensitatea de radiație a corpurilor negre, cenușii și selective

$$I_{\lambda_N} = c_1 \cdot \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda \cdot T}} - 1} \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (8.89)$$

unde: $c_1 = 3,74 \cdot 10^{-16} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^2];$
 $c_2 = 1,438 \cdot 10^{-2} \quad [\text{W} \cdot \text{K}].$

Intensitatea de radiație crește de la zero, la lungimi de undă foarte mici, până la o valoare maximă după care scade lent cu creșterea lungimii de undă, dar nu devine zero nici pentru limita superioară a radiației termice. În figura 8.6 este prezentată legea lui Planck pentru corpul negru, cenușiu și selectiv.

Legea lui Wien

Reprezentând grafic intensitatea de radiație a corpului negru pentru diferite temperaturi (figura 8.7), se observă că, odată cu creșterea temperaturii, crește valoarea maximă a intensității de radiație și scade lungimea de undă pentru care intensitatea de radiație are valoare maximă.

Legea lui Wien exprimă legătura dintre temperatura absolută T și lungimea de undă λ_m la care apare maximum intensității de radiație astfel „Produsul dintre temperatura corpului negru și lungimea de undă la care intensitatea de radiație are valoare maximă este constant”, adică:

$$\lambda_m \cdot T = \text{const.} = 2.896 \text{ [m} \cdot \text{K]} \quad (8.90)$$

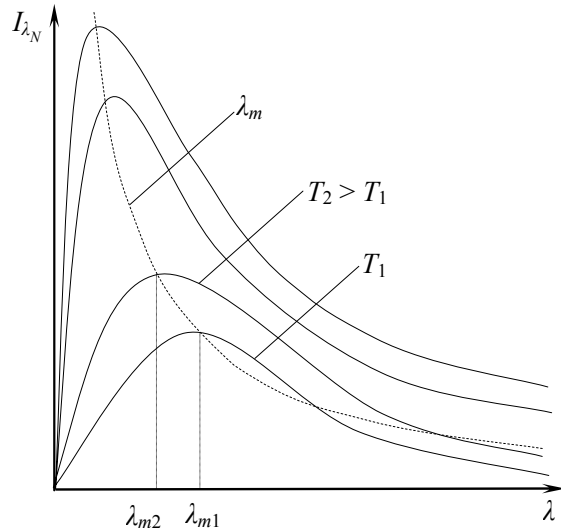


Figura 8.7: Intensitatea de radiație a corpurilor negre, cenușii și selective

Legea Stefan - Boltzmann

Densitatea fluxului de energie elementar emis de unitatea de suprafață a corpului negru pentru o anumită izotermă T , pe un interval elementar de lungimi de undă $d\lambda$, este:

$$d\dot{e}_N = I_{\lambda_N} \cdot d\lambda \text{ [W/m}^2\text{]} \quad (8.91)$$

Integrând această relație pe întregul interval posibil de lungimi de undă se obține densitatea fluxului total de energie pe care o poate emite unitatea de suprafață a corpului negru la temperatura T , numită și *puterea de emisie a corpului negru*:

$$\dot{e}_N = \frac{6,494 \cdot c_1}{c_2^4} \cdot T^4 = \sigma_N \cdot T^4 \text{ [W]} \quad (8.92)$$

Această relație reprezintă **legea Stefan-Boltzmann** (a fost găsită experimental de către Stefan și demonstrată teoretic de Boltzmann). Pentru calcule numerice, este mai comod să se scrie legea Stefan-Boltzmann sub forma:

$$\dot{e}_N = C_N \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \text{ [W]} \quad (8.93)$$

unde: $C_N = 5,77 \text{ [W/m}^2 \cdot (\text{K}/100)^4\text{]}$ - *constanta de radiație a corpului negru*.

Pentru corpurile cenușii, la aceeași temperatură, puterea de emisie $\dot{e}$ este mai mică decât cea a corpului negru $\dot{e}_N$. Se definește *gradul de negreală*, sau *factorul de emisie* (ε), ca raportul dintre puterea de emisie a corpului cenușiu și a corpului negru la aceeași temperatură.

$$\varepsilon = \frac{\dot{e}}{\dot{e}_N} = \frac{\sigma \cdot T^4}{\sigma_N \cdot T^4} = \frac{C}{C_N} \text{ [-]} \quad (8.94)$$

unde: $C \text{ [W/m}^2 \cdot (\text{K}/100)^4\text{]}$ - *constanta de radiație a corpului cenușiu*.

Legea lui Lambert

Legea Stefan-Boltzmann determină puterea de emisie a corpului negru $\dot{e}_N \text{ [W/m}^2\text{]}$ pe toate direcțiile semiplanului de deasupra suprafeței radiante. Fluxul elementar de energie $d\dot{E}_N \text{ [W]}$ radiat de suprafața elementară $dA_1 \text{ [m}^2\text{]}$ a unui corp negru în întreg semiplanul este:

$$d\dot{E}_N = \dot{E}_N \cdot dA_1 = C_N \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \cdot dA_1 \quad (8.95)$$

Conform **legii lui Lambert**, fluxul de energie radiat de elementul de suprafață dA_1 al unui corp negru pe direcția elementului dA_2 văzut sub unghiul φ , se poate calcula cu relația:

$$d^2(\dot{E}_N)_\varphi = d(\dot{E}_N)_n \cdot d\Omega \cdot \cos\varphi = (\dot{E}_N)_n \cdot dA_1 \cdot d\Omega \cdot \cos\varphi \quad (8.96)$$

unde: $d(\dot{E}_N)_\varphi$ [W] - fluxul de energie după direcția φ ;

$d(\dot{E}_N)_n$ [W] - fluxul de energie după direcția normală la elementul dA_1 ;

$d\Omega$ [rad] - unghiul solid sub care se vede elementul dA_2 din centrul elementului dA_1 .

Legea a II-a a lui Kirchhoff

Considerăm doi pereți cu temperaturi diferite $T_1 > T_2$ și din materiale diferite, având factorii de emisie și absorbție ε_1, A_1 respectiv ε_2, A_2 . Conform legii Stefan - Boltzmann, densitățile fluxurilor de energie emise de cei doi pereți, unul spre celălalt, sunt:

$$\dot{e}_1 = \varepsilon_1 \cdot C_N \cdot \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 = C_1 \cdot \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \quad (8.97)$$

$$\dot{e}_2 = \varepsilon_2 \cdot C_N \cdot \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 = C_2 \cdot \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \quad (8.98)$$

Pe suprafața unui perete ajunge atât energia emisă prin radiație de celălalt perete, cât și partea din emisia proprie reflectată de peretele opus. Se definește *luminozitatea unei suprafețe* ca fiind densitatea fluxului de energie care părăsește suprafața respectivă. Considerând factorul de transparență zero pentru ambii pereți, luminozitățile celor doi pereți sunt:

$$\begin{cases} L_1 = \dot{e}_1 + (1 - A_1) \cdot L_2 \\ L_2 = \dot{e}_2 + (1 - A_2) \cdot L_1 \end{cases} \quad (8.99)$$

Din relațiile de definiție de mai sus, luminozitatea unui perete este funcție de luminozitatea celuilalt perete. Rezolvând sistemul de două ecuații pentru necunoscutele L_1 și L_2 se obține:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\dot{e}_1 + \dot{e}_2 \cdot (1 - A_1)}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \\ L_2 = \frac{\dot{e}_2 + \dot{e}_1 \cdot (1 - A_2)}{A_1 + A_2 - A_1 A_2} \end{cases} \quad (8.100)$$

Densitatea fluxului de căldură schimbat prin radiație între cei doi pereți este:

$$\dot{q}_{12} = L_1 - L_2 = \frac{\dot{e}_1 \cdot A_2 - \dot{e}_2 \cdot A_1}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (8.101)$$

În cazul în care se ajunge la echilibrarea temperaturilor, astfel încât pereții să nu mai schimbe căldură între ei ($\dot{q}_{12} = 0$), înseamnă că:

$$\dot{e}_1 \cdot A_2 = \dot{e}_2 \cdot A_1 \Leftrightarrow \frac{\dot{e}_1}{A_1} = \frac{\dot{e}_2}{A_2}$$

În concluzie, indiferent de natura corpului, inclusiv pentru corpul negru, la o temperatură dată, raportul dintre densitatea fluxului de energie emis și factorul de absorbție este constant și se poate scrie în general:

$$\frac{\dot{e}}{A} = \frac{\dot{e}_N}{1} = \dot{e}_N \Rightarrow \frac{\dot{e}}{\dot{e}_N} = \varepsilon = A \quad (8.102)$$

Legea a II-a a lui Kirchhoff se enunță astfel: „Pentru orice corp netransparent cu o anumită temperatură T factorul de emisie este egal cu factorul de absorbție.”

8.4.2 Schimbul de căldură prin radiație între două suprafețe solide

Dacă două corpuri au temperaturi diferite, între ele se va produce un schimb de căldură prin radiații termice. Corpul mai cald cedează căldura, iar cel mai rece o primește.

Schimbul de căldură între cele două corpuri depinde de natura corpurilor, de diferența de temperatură, de forma corpurilor precum și de poziția lor relativă.

Pe baza legii lui Kirchhoff se poate stabili relația pentru calculul densității fluxului de căldură transmis prin radiație între doi pereți cenușii plani paraleli de extindere infinită sub forma:

$$\dot{q}_{12} = \frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = C_{12} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \alpha_r (T_1 - T_2) \quad (8.103)$$

unde: C_{12} - constanta de schimb de căldură prin radiație;

α_r [W/m²·K] - coeficientul echivalent de schimb de căldură prin radiație.

S-au notat cu α_r și C_{12} :

$$\alpha_r = C_{12} \cdot \frac{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{T_1 - T_2} \quad (8.104)$$

$$C_{12} = \frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_N}} \quad (8.105)$$

Folosirea coeficientului α_r prezintă avantajul că la calculul schimbului de căldură, când apare convecție și radiație la suprafața corpului, se poate calcula coeficientul total de schimb de căldură α cu relația:

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_r \quad (8.106)$$

În cazul în care cele două suprafețe A_1 și A_2 formează un sistem închis, se poate folosi relația:

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (8.107)$$

unde:
$$C_{12} = \frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (8.108)$$

Aceste relații sunt aplicabile la corpuri de orice formă, dacă corpul mic este convex pe toată periferia, cum ar fi corpurile sferice sau cilindrice precum și atunci când corpul convex și cel concav formează un spațiu închis ca cele din figura 8.8:

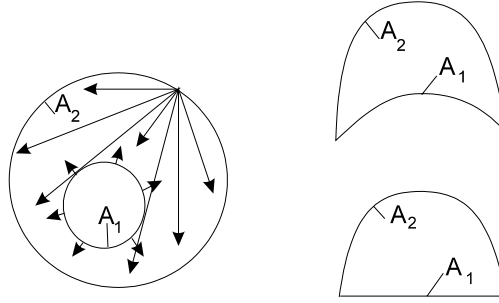


Figura 8.8: Radiația între corpurile care formează un sistem închis

8.4.3 Efectul paravanelor asupra schimbului de căldură prin radiație

Se consideră cazul a doi pereți plan paraleli de extindere infinită, cu temperaturile $T_1 > T_2$ și cu factorii de emisie ε_1 și ε_2 , între care se intercalează un paravan netransparent cu factorul de emisie ε_p , identic pe ambele fețe.

În condițiile în care grosimea paravanului este neglijabilă, deci căderea de temperatură în paravan tinde la zero și se neglijează schimbul de căldură prin convecție, se pune problema de a determina influența paravanului asupra schimbului de căldură dintre cei doi pereți.

În lipsa paravanului, densitatea fluxului de căldură schimbat între două suprafețe este dată de relațiile din paragraful anterior. În cazul prezenței paravanului, în regim staționar, densitatea fluxului de căldură transmis de la peretele 1 la paravan ($\dot{q}_{1p}$) este egală cu densitatea fluxului de căldură transmis între cei doi pereți în prezența paravanului ($\dot{q}_{(1-2)p}$):

$$\frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_p} - 1} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_p}{100} \right)^4 \right] = \frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \cdot \left[\left(\frac{T_p}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (8.109)$$

$$\dot{q}_{(1-2)p} = \frac{C_N}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_p} - 1 \right)} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (8.110)$$

Efectul paravanului asupra schimbului de căldură prin radiație se poate pune în evidență făcând raportul:

$$\frac{\dot{q}_{(1-2)p}}{\dot{q}_{1-2}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_p} - 1 \right)} \quad (8.111)$$

Dacă paravanul este un corp absolut negru, deci $\varepsilon_p = 1$, fluxul de căldură se reduce la jumătate. Dacă paravanul este un corp alb, atunci schimbul de căldură prin radiație între cele două suprafețe se reduce la zero. Este indicat deci ca factorul de emisie al paravanului să fie cât mai mic posibil. Dacă paravanul și cei doi pereți au același factor de emisie, fluxul de căldură se reduce de două ori.

Schimbul de căldură prin radiație între două suprafețe se poate reduce și mai mult dacă se folosesc paravane formate din mai multe straturi. Pentru n straturi fluxul de căldură se reduce de $n+1$ ori față de cazul fără paravan. Reducerea va fi cu atât mai mare cu cât ε_p va fi mai mic.

8.4.4 Radiația gazelor

Spre deosebire de corpurile solide, care pot fi considerate corpuri cenușii, gazele se comportă selectiv față de radiațiile termice, adică absorb și emit pe diferite intervale de lungimi de undă, cu diferiți factori de absorbție și emisie, iar în restul domeniului de lungimi de undă se comportă ca un corp transparent.

Această comportare se manifestă la gazele triatomice și poliatomice, cum ar fi bioxidul de carbon (CO_2), vaporii de apă (H_2O), bioxidul de sulf (SO_2). Gazele monoatomice cum ar fi hidrogenul atomic, oxigenul atomic și cele biatomice cum ar fi oxigenul, azotul, hidrogenul se comportă practic ca niște corpuri transparente pentru radiațiile termice. Cel mai mult ne interesează comportarea bioxidului de carbon și a vaporilor de apă, care se degajă în cantitate mare în procesele de ardere a combustibililor fosili.

Dacă la corpurile solide absorbția și emisia radiațiilor termice se produce practic în stratul superficial, la gaze absorbția în benzile caracteristice se produce pe măsură ce radiația incidentă pătrunde în stratul de gaz. Factorul de absorbție pentru o anumită lungime de undă A_λ se definește cu relația:

$$A_\lambda = \frac{I_{\lambda_0} - I_\lambda}{I_{\lambda_0}} \quad (8.112)$$

unde: I_{λ_0} [W/m^2] - intensitatea radiației monocromatice incidente;

I_λ [W/m^2] - intensitatea radiației monocromatice după parcurgerea drumului s [m] prin mediul gazos

Deci la grosimi mari ale stratului de gaz, chiar la valori foarte mici ale coeficientului de atenuare factorul de absorbție tinde la 1, deci absorbția radiației monocromatice este totală. Conform legii lui Kirchhoff, factorul de emisie ε_λ al gazului este identic cu factorul de absorbție la aceeași temperatură.

Pentru simplificarea calculelor de schimb de căldură la radiația gazelor se asimilează gazul selectiv cu un corp cenușiu, care respectă legea lui Stefan-Boltzmann.

Considerăm un gaz cu temperatura T_g , având factorul de emisie ε_g egal cu factorul de absorbție A_g . Gazul schimbă căldură prin radiație cu un perete având temperatura T_p și un factor de emisie $\varepsilon < 1$, egal cu factorul de absorbție A . Fluxul specific de căldură schimbat prin radiație între gaz și perete se determină ca o diferență a două serii cu un număr infinit de termeni. Luând în considerare numai primul termen al fiecărei serii, ceea ce înseamnă a neglija reflexiile, se obține:

$$\dot{q} = \varepsilon \cdot C_N \cdot \left[\varepsilon_g \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - A_{g_p} \cdot \left(\frac{T_p}{100} \right)^4 \right] \quad (8.113)$$

Aproximația făcută prin neglijarea reflexiilor multiple este cu atât mai valabilă cu cât ε este mai apropiat de unu.

Modelarea matematică

Modelarea matematică urmărește formularea problemei de câmp în termeni exclusiv matematici. În această etapă, se specifică datele problemei, dar și soluția acesteia ca obiecte matematice, corect și precis definite. Formularea în termeni matematici trebuie făcută în așa fel, încât să nu mai fie necesar apelul ulterior la semnificații fizice, ipoteze sau presupuneri de natură fizică, de exemplu la pasivitatea sau reciprocitatea materialelor, dacă acestea sunt relevante pentru rezolvarea problemei, ele trebuie specificate cu ocazia formulării matematice ca restricții algebrice. Cu ocazia modelării matematice, se (re)formulează ecuațiile și condițiile satisfăcute de soluție, de exemplu condițiile de frontieră, alese astfel încât să asigure formularea corectă a problemei, demonstrându-se existența, unicitatea și continuitatea soluției față de date. Un aspect fundamental al modelării matematice este stabilirea cadrului funcțional al problemei.

2.1 Formularea matematică

2.1.1 Formularea corectă

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în diferite regimuri are de regulă categoriile de **date** prezentate în continuare:

1. **Forma și dimensiunile domeniului** de calcul Ω , și modul în care acesta este structurat în subdomenii. Domeniul Ω este o parte deschisă, mărginită și conexă din $\mathbb{R}^d$, în care $d = 1, 2$ sau 3 , în funcție de dimensiunea problemei 1D, 2D și respectiv 3D. Simbolul 2.5D se referă la problemele axisimetrice, la care datele și soluția depind de două variabile r și z ale unui sistem cilindric de coordonate. În problemele axisimetrice domeniul de calcul este tot bidimensional, ca și în problemele 2D, dar aici soluția nu depinde de coordonata φ , în timp ce la o problemă 2D, numită și plan-paralelă, soluția

nu depinde de coordonata carteziană z .

În literatura matematică se întâlnesc multe domenii stranii, unele definite special, cu multă fantezie pentru a construi contraexemple la afirmațiile analizei clasice. Ne referim, de exemplu la domenii multiplu conexe cu o infinitate de goluri, și la domeniile cu frontiere fractale (http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension). La cealaltă limită se află domeniile cele mai netede, cum este cel sferic. În practică, se întâlnesc rar domenii cu forme atât de netede, mai curând ele sunt reuniuni finite de domenii rectangulare și/sau cilindrice. Constatăm că frontiera domeniilor întâlnite cel mai frecvent în practică nu este perfect netedă ci are vârfuri și muchii.

Categoria de domenii, suficient de netede pentru a menține bunele proprietăți ale funcțiilor definite pe ele, dar care cuprinde suficient de multe cazuri de interes practic sunt domeniile Lipschitz (http://en.wikipedia.org/wiki/Lipschitz_domain), care pot avea colțuri și muchii, dar aproape peste tot, pe frontieră se poate defini un versor normal $\mathbf{n}$, orientat spre exteriorul domeniului. Dacă domeniul este mărginit, atunci spațiul de funcții extrem de netede $C^\infty(\bar{\Omega})$ este dens în spațiile de funcții generalizate, cum sunt spre exemplu spațiile Sobolev, H^1 , $H(\text{rot})$, $H(\text{div})$, în normele acestor spații. Adică orice element al spațiilor Sobolev menționate poate fi aproximat oricât de bine cu o funcție clasică foarte netedă, infinit derivabilă. Aceasta permite definirea urmei funcției generalizate pe frontiera domeniului și demonstrarea pentru aceasta a formulelor lui Green, Gauss și Stokes [133]. Acesta este motivul pentru care în continuare vom considera numai probleme definite pe domenii Lipschitz, despre care vom spune că au o frontieră suficient de netedă.

2. **Caracteristicile de material:** dielectrice, magnetice și de conducție trebuie specificate în fiecare punct din domeniul de calcul. De cele mai multe ori, domeniul de calcul este format prin reuniunea unui număr finit de subdomenii omogene. Dacă materialele au caracteristici afine:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i,\end{aligned}\tag{2.1}$$

atunci fiecare subdomeniu omogen este caracterizat de trei parametri de material (pseudo)scalari sau tensoriali $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$ și de trei mărimi vectoriale $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{B}_r$, $\mathbf{J}_i$, care sunt nu numai caracteristici de material, ci descriu și sursele interne, imprimate ale câmpului. Multă grijă trebuie acordată proprietăților matricelor ce descriu cei trei tensori (care de cele mai multe ori sunt

diagonalizați, sau chiar reduși la pseudosclari, în cazul mediilor izotrope) și anume simetria și pozitivitatea lor de definire, proprietăți care au semnificații fizice clare, asigurând reciprocitatea și respectiv pasivitatea mediului respectiv. În cazul mediilor neliniare, constantele de material ε , μ , σ se înlocuiesc cu funcții de E , H și respectiv E sau se consideră că $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{B}_r$ sau $\mathbf{J}_i$ depind de $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ și respectiv $\mathbf{E}$.

3. **Sursele interne de câmp**, sunt mărimile locale care intervin în membrul drept al ecuațiilor, cum sunt densitatea de sarcină în electrostatică sau densitatea de curent în regimul magneto-staționar. Acestea sunt descrise de funcții scalare și respectiv vectoriale, definite pe domeniul de calcul Ω . Ele sunt funcții clasice, dar sunt și funcții generalizate, distribuții, pentru a modela cazurile degenerate, în care sursele de câmp sunt distribuite superficial, lineic sau chiar concentrate punctual [131]. După cum am menționat anterior, câmpurile vectoriale $\mathbf{P}_p$; $\mathbf{B}_r$; $\mathbf{J}_i$, definite pe Ω sunt la rândul lor surse interne de câmp. În regimurile de evoluție, aceste surse pot fi funcții cunoscute și de timp, în intervalul $(t_{\min}, t_{\max})$. De exemplu, $\mathbf{J}_i = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, cu $\mathbf{r} \in \Omega$ și $t \in (t_{\min}, t_{\max})$, deci curentul impus este descris de funcția vectorială $\mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Trebuie să mai remarcăm, că în funcție de regim, densitatea de sarcină ρ și densitatea de curent $\mathbf{J}$ pot fi fie date, fie necunoscute.
4. **Sursele externe de câmp** sunt descrise de condițiile de frontieră. Acestea sunt specifice fiecărui regim, dar se referă la componentele câmpului, care se conservă la trecerea prin suprafața de discontinuitate, deci și prin frontieră, și anume: componenta tangențială a intensității câmpului electric/magnetic, componenta normală a inducției electrice/magnetice, sau componenta normală a densității de curent. Condițiile de frontieră pentru potențialul vector $\mathbf{A}$ și pentru cel scalar V se referă în fond tot la componentele menționate anterior, dar pentru a asigura unicitatea potențialelor pot să apară și valoarea potențialului scalar V sau a componente normale/tangențiale a potențialului vector $\mathbf{A}$. Identificarea exactă a condițiilor de frontieră se face în enunțul teoremelor de unicitate pentru soluția problemei, care vor fi prezentate în capitolul următor.
5. **Sursele anterioare de câmp**, intervin doar în regimurile evolutive în timp: EQS, MQS sau ED, în regim tranzitoriu, și sunt descrise de condițiile inițiale ale câmpului electromagnetic. De regulă trebuie cunoscută distribuția la momentul inițial, a acelei componente, care descrie starea câmpului electromagnetic, și apare deci derivată față de timp în ecuațiile regimului respectiv: inducția electrică la momentul inițial $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ în EQS, inducția

magentiacă $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ în MQS, iar în regimul electrodinamic general variabil ED, trebuie cunoscută distribuția la momentul inițial a ambelor câmpuri $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ și $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$.

Soluția problemei este alcătuită, în funcție de regim, de unul sau mai multe câmpuri și potențiale, din lista: $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{A}, V, \mathbf{J}, \rho$, dar și alte potențiale cum este T - potențialul vector al densității de curent sau V_m - potențialul scalar al câmpului magnetic. În funcție de regim, $\mathbf{J}$ și ρ sunt când date ale problemei, când părți ale soluției. Toate aceste câmpuri sunt definite pe domeniul Ω , iar cazul regimurilor variabile în timp, și pe intervalul $(t_{\min}, t_{\max})$. De regulă, cele două extreme ale intervalului de timp, sunt de la caz la caz: $t_{\min}$ are valoarea $-\infty$ sau 0, în timp ce $t_{\max}$ este o constantă reală nenulă, mărginită T sau $+\infty$. Aceste lucruri au mai fost spuse, dar ce este de fapt nou și specific formulării matematice, este identificarea clasei de funcții - a spațiului de funcții, liniar sau afin din care face parte soluția, care se face prin specificarea cadrului funcțional, despre care vom vorbi în continuare.

Formularea corectă a unei probleme, care presupune rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale impune următoarele trei condiții (http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem):

1. **Existența soluției**, demonstrată printr-o teoremă de existență, care poate fi abstractă neconstructivă, sau constructivă, adică să indice cum se construiește soluția. Demonstrând existența unei soluții numerice, de exemplu obținută prin algoritmul elementului finit, împreună cu o teoremă de convergență, prin care se demonstrează că soluția numerică tinde către cea exactă, atunci când rețeaua de discretizare devine tot mai fină, se obține o demonstrație constructivă a existenței soluției exacte.
2. **Unicitatea soluției**, demonstrată printr-o teoremă de unicitate. De regulă, pentru demonstrație se folosește reducerea la absurd, presupunând că există două soluții distincte ale problemei. Diferența dintre cele două soluții satisface aceleași ecuații ca cele ale problemei originale, numai că în condiții de surse nule. Dacă se demonstrează că anularea surselor atrage după sine anularea soluției, lucru realizat de obicei folosind funcționala de energie a problemei, atunci demonstrația este încheiată deoarece diferența nu poate fi și nulă și nenulă în același timp. În cazul problemelor liniare, teorema de unicitate este consecința lemei soluției banale, care afirmă că problema cu surse interne/externe și anterioare nule are o singură soluție, cea banală (nulă). Pentru demonstrația ei se folosește tot funcționala de energie, care se anulează în ipotezele lemei și odată cu ea și câmpul soluție. Dacă problema liniară cu surse nule are soluție nulă, atunci operatorul liniar care leagă soluția de sursele sale are nucleul nul, iar problema cu surse nenule are soluție

unică.

3. **Stabilitatea** în sens Hadamard, demonstrată printr-o teoremă de continuitate a soluției față de datele problemei. Condiția s-a impus prin exemplu dat de Hadamard în 1902 (<http://www.apmaths.uwo.ca/~rcorless/AM505/day3/node2.html>), în care este rezolvată ecuația lui Laplace cu condiții de frontieră, care asigură existența și unicitatea, dar nu și stabilitatea soluției. Problemele prost formulate în sens Hadamard nu au nici o valoare practică, deoarece cele mai mici perturbații ale datelor (de exemplu prin trunchierea lor, în urma reprezentării pe calculator, cu un număr finit de cifre semnificative) pot genera modificări mari ale soluției, care astfel devine total nerelevantă.

O problemă de câmp presupune rezolvarea unei ecuații, pe care o să o scriem generic astfel:

$$F(x) = y, \quad (2.2)$$

unde $y \in Y$ reprezintă datele, $x \in X$ reprezintă soluția și aplicația $F : X \rightarrow Y$ reprezintă ecuația ce trebuie rezolvată. Ca o problemă să fie bine formulată trebuie ca $\forall y \in Y, \exists! x \in X$, adică să existe în spațiul soluției X un element x , care verifică ecuația, iar acesta să fie unic. Acestea sunt chiar condițiile ca aplicația F să fie inversabilă (adică bijectivă). În consecință, F trebuie să fie surjectivă și injectivă. Condiția de injectivitate este dată de teorema de unicitate a soluției, iar cea de surjectivitate este dată de teorema de existență. În plus, mai trebuie îndeplinită o a treia condiție, cea de continuitate a aplicației inverse F^{-1} , care leagă datele de soluție. În consecință, cele două spații X și Y , în care se caută soluția și în care se află datele, trebuie să fie nu numai spații cu structuri algebrice, ci și spații cu structuri topologice, ca să se poată vorbi de continuitate, normă, distanță, convergență, etc. Convergența este importantă, și pentru că multe teoreme de existență sunt constructive (de ex. teorema punctului fix) și stau la baza algoritmilor numerici de tip iterativ, în care se construiește un șir de soluții numerice, aproximative, convergente către soluția exactă. Iată de ce condițiile de bună formulare nu pot fi prezentate fără specificarea exactă (matematică) a spațiilor în care se caută soluția și a spațiului în care se află datele. Acestea sunt spații de funcții numerice scalare sau vectoriale, deci au o structură de spațiu vectorial (eventual afin), dar au și o structură topologică (de regulă sunt spații Banach (http://en.wikipedia.org/wiki/Banach_space) sau Hilbert (http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space), deci sunt complete, șirurile Cauchy fiind convergente - lucru extrem de important pentru demonstrarea existenței).

În cazul în care F este un operator liniar, lucrurile se simplifică, deoarece unicitatea este asigurată, și problema are soluție unică pentru orice $y \in Y$, dacă ecuația

omogenă $F(x) = 0$ are doar soluția banală $x = 0$, adică dacă nucleul operatorului F se reduce la zero.

În cazul finit dimensional, funcția F se reprezintă prin matricea $\mathbf{F}$, care trebuie să aibă nucleu nul, deci să nu aibă valori proprii nule, iar pentru existența soluției, trebuie ca y să aparțină imaginii matricei $\mathbf{F}$ (dacă $\mathbf{F}$ este pătrată, condiția de unicitate este echivalentă cu cea de existență (http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_algebra).

Pentru a caracteriza cantitativ cât de bine este formulată o problemă, se folosește **numarul ei de condiționare** $\kappa(F)$. Acesta exprimă cât de mari pot fi erorile relative ale soluției raportate la erorile datelor http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number. În cazul liniar, finit dimensional, numărul de condiționare al matricei $\mathbf{F}$ este $\kappa(\mathbf{F}) = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{F}^{-1}\|$, egal pentru matrice simetrice și pozitiv definite cu raportul dintre valoarea proprie maximă și cea minimă a matricei $\mathbf{F}$. Cu cât acest factor de amplificare a erorii este mai mare, cu atât problema este mai slab condiționată și mai dificil de rezolvat, atât de metodele directe cât și de cele iterative, a căror convergență este mai slabă, pe măsură ce acest numar este mai mare (iar peste o limită a acestui număr, metodele iterative devin chiar divergente).

De exemplu, în rezolvarea pe calculator, logaritmul zecimal al numărului de condiționare indică numărul de cifre semnificative exacte, pe care le pot pierde datele, până să se ajungă la soluție. Precondiționarea este tehnica prin care se îmbunătățește numărul de condiționare al matricei [10], (<http://en.wikipedia.org/wiki/Preconditioner>). În particular, dacă datele sunt exprimate cu 6 cifre semnificative exacte și numărul de condiționare este un milion, soluția numerică nu are relevanță, deoarece aceasta nu are nici o cifră semnificativă exactă. În acest caz, problema este imposibil de rezolvat numeric, cu un minim de precizie, chiar dacă sunt îndeplinite cele trei condiții teoretice de bună formulare: unicitate, existență și continuitate în sens Hadamard. Din aceste motive, în buna formulare a problemelor de câmp, ce vor fi rezolvate numeric, condiția de continuitate (stabilitate în sens Hadamard) se înlocuiește de obicei cu o condiție mai tare, de **bună condiționare**, mai exact: se impune să existe constanta reală L , a.î.

$$\|F^{-1}(u) - F^{-1}(v)\|_X < L\|u - v\|_Y, \quad (2.3)$$

pentru orice $u, v \in Y$, numită condiția lui Lipschitz (http://en.wikipedia.org/wiki/Lipschitz_continuity). Constanta L este proporțională cu numărul de condiționare al problemei

$$\kappa(F) = \frac{L\|x\|_X}{\|y\|_Y}. \quad (2.4)$$

Prin această condiție, impunem numărului de condiționare al problemei valori rezonabile, dependente de precizia pe care o considerăm acceptabilă.

În concluzie, constatăm ca nu se poate vorbi deci de buna formulare a unei probleme, dacă nu sunt identificate spațiile X și Y , în care căutăm soluția și respectiv se află datele problemei și nu specificăm normele $\|\cdot\|_X$ și respectiv $\|\cdot\|_Y$ din aceste spații. Această operație fundamentală în modelarea matematică se numește stabilirea cadrului funcțional al problemei.

2.1.2 Forme clasice și slabe ale problemelor scalare

Forma tare a ecuațiilor. După cum am văzut anterior, ecuațiile pe care trebuie să le satisfacă soluția într-o problemă de câmp au fie forma unor ecuații cu derivate parțiale și algebrice de ordinul întâi, satisfăcute de componentele câmpului, fie în cazul potențialelor, aceste ecuații sunt cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Forma acestor ecuații se modifică de la regim la regim. Pentru a prezenta conceptele în forma lor cea mai clară, vom porni de la cel mai simplu caz, al regimului electrostatic în medii liniare, într-o problemă în care pe frontieră se află un conductor, pe care îl presupunem chiar masa dispozitivului studiat. În acest caz simplu, modelul diferențial de ordinul doi conține relațiile:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon(x) \operatorname{grad} V(x)) = \rho(x), \forall x \in \Omega, \\ V(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

aceasta fiind formularea clasică ("tare") a problemei de potențial, în care soluția se caută în spațiul funcțiilor $\mathcal{C}_0^2(\Omega)$ continue și dublu derivabile, definite pe Ω cu condiții Dirichlet nule pe frontieră, iar ecuația de tip Poisson generalizată este satisfăcută punctual de soluție.

Un prim pas către verificarea formulării corecte a acestei probleme va fi făcut prin reformularea ei. Dacă vrem ca ecuația să fie satisfăcută, reziduul ei trebuie să fie identic nul, deci îl putem proiecta pe toate direcțiile unui spațiu Hilbert infinit-dimensional, complet, H alcătuit din funcțiile "de test" u :

$$(-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) = (\rho, u), \forall u \in H. \quad (2.6)$$

Aici ca și în continuare vom folosi notația preferată de matematicieni, $v = V(x)$ pentru potențial și dx în loc de dv . Putem afirma că această formă a ecuației nu este altceva decât aplicarea metodei reziduurilor ponderate. Deoarece ne așteptăm ca soluția să aibă energie finită, produsul scalar este cel din L^2 :

$$(\rho, u) = \int_{\Omega} \rho u dx = f(u); \quad (2.7)$$

relație care definește o funcțională liniară f de u , pentru $\rho \in L^2(\Omega)$ și $u \in H$. Iar

$$\begin{aligned}
 (-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v) dx = \\
 &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u(\varepsilon \operatorname{grad} v)) dx + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \\
 &= - \int_{\partial\Omega} u \varepsilon \frac{dv}{dn} dA + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = a(v, u)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

este o funcțională biliniară simetrică definită pe $H \times H$, în condiții de frontieră Dirichlet nule.

Aici o etapă importantă a demonstrației a fost parcursă, aplicând relația lui Green și apoi relația Gauss, care ca în forma finală să intervină doar derivate spațiale de ordinul întâi (*grad*). Dacă vom presupune că și funcțiile de test u satisfac condiția Dirichlet nulă, atunci integrala pe frontiera domeniului se anulează iar ecuația (2.6) devine:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \rho u dx, \quad \forall u \in H, \tag{2.9}$$

relație care este **forma slabă a ecuațiilor problemei**, cunoscută și ca forma variațională sau de proiecție.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation). Compact ea se scrie astfel:

$$a(u, v) = f(u), \quad \forall u \in H, \tag{2.10}$$

în care $a(.,.) = \langle ., . \rangle$ este funcționala biliniară simetrică numită și "produsul scalar energetic" (a nu se confunda cu $(.,.)$ - produsul scalar din L^2), și care pentru $u = v$ măsoară "energia" potențialului v .

Comparând forma slabă cu cea tare, constatăm următoarele:

- în forma tare intervin derivate de ordinul doi, pe când în cea slabă numai derivate de ordinul unu;
- în forma tare, condiția de frontieră este scrisă separat, pe când în forma slabă ea este inclusă în ecuație;
- ecuația tare se verifică punctual (în fiecare punct din domeniul de calcul), în timp ce în forma slabă, ecuația se verifică global - funcțional (pentru fiecare funcție de test, de bază);
- parametrul de material ε poate avea o variație spațială arbitrară în forma slabă, deoarece nu este derivat, în timp ce în forma tare el trebuie să aibă o variație suficient de netedă pentru a fi derivabil după înmulțire cu $\operatorname{grad} v$.

Sunt evidențiate fără dubiu avantajele folosirii formei slabe a ecuației. Ele devin și mai evidente dacă derivatele (*grad*), care apar în forma slabă sunt considerate în sens generalizat. Atunci spațiul H al funcțiilor de test este chiar spațiul Sobolev $H_0^1(\Omega)$ al funcțiilor de pătrat integrabil pe Ω , ale căror derivate generalizate sunt tot de pătrat integrabil, și care au valori nule pe $\partial\Omega$, care este un spațiu Hilbert cu produsul scalar $(u, v)_H = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)$ (http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space) [45].

Forma slabă a problemei de electrostatică poate fi considerată ca un caz particular al unui cadru funcțional, abstract, de foarte mare generalitate. În acesta, un rol esențial îl are următoarea teorema de Analiza Funcțională.

Teorema Lax-Milgram: dacă funcționala (forma) biliniară $a(u, v)$ definită pe spațiul Hilbert $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad (2.11)$$

și coercivă, adică $\exists c, a. \hat{}$

$$|a(u, u)| \geq c \|u\|^2, \quad (2.12)$$

atunci ecuația $a(u, v) = f(u)$ are o soluție $v \in H, \forall f \in H'$ (spațiului dual al lui H , al funcționalelor continue pe H), aceasta este unică și mărginită $\|v\| < \|f\|/c$, unde c este constanta de coercitivitate, ceea ce garantează îndeplinirea tuturor condițiilor de bună formulare (inclusiv cea de buna conditionare, cu $L = 1/c$).

(http://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Milgram_theorem),
(http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation),
(http://en.wikipedia.org/wiki/Babuska-Lax-Milgram_theorem),
[7].

După cum se va constata și ulterior, în acest document sunt prezentate doar principiile și ideile matematice. Pentru detalii și demonstrații trebuie folosite trimiterele bibliografice.

Formularea corectă a problemei *div-grad*. Buna formulare, existența, unicitatea și stabilitatea soluției pentru forma slabă a problemelor de regim staționar cu potențial scalar este o consecință a teoremei Lax-Milgram, în care singurele condiții sunt cele de marginire și coercitivitate ale funcționalei biliniare $a(u, v)$. Dacă se definește $\|u\|_H := \|\nabla u\|$ cu $\|\cdot\|$ norma din $L^2(\Omega)$, cele două norme fiind echivalente în baza inegalității lui Poincaré- Friedrichs (http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_inequality), [120], [64], atunci cele două condiții de bună formulare sunt îndeplinite, deoarece:

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|^2 = \|u\|_H^2, \quad (2.13)$$

deci constanta de coercitivitate $c = 1$ și

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| = \|u\|_H \|v\|_H, \quad (2.14)$$

conform inegalității Cauchy-Schwarz

(http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarz_inequality),

deci constanta de continuitate este $C = 1$. În consecință, forma slabă a problemei lui Poisson cu condiții de frontieră de tip Dirichlet nule este corect formulată, și are soluție unică $u \in H = H_0^1(\Omega)$, pentru orice sursă $f \in [H]' = L^2(\Omega)$, soluție continuă față de date deoarece $\|\nabla u\| \leq \|f\|$. Ceea ce face ca procedura de determinare a câmpului să fie una constructivă față de sursele de câmp.

Problema mixtă. Să vedem cum putem reformula problema determinării potențialului electrostatic, despre care știm că satisface ecuația:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \rho, \quad (2.15)$$

în domenii, care au condiții mixte de frontieră: $V = V_0(x), x \in S_D$ - condiții Dirichlet pe o parte a frontierei și $\varepsilon dV/dn = g(x), x \in S_N = \partial\Omega \setminus S_D$ - condiții Neumann pe restul frontierei.

Afirmația referitoare la formularea corectă se extinde și la problema, cu condiții mixte, adecvând cadrul funcțional, prin alegerea $H = \{u \in H^1(\Omega) | u = 0 \in S_D\}$ [120].

Pentru început, dacă $S_N = \emptyset$, atunci este suficient să translatăm spațiul $H_0^1(\Omega)$ cu o funcție constantă V_0 și obținem un spațiu afin $H_0 = V_0 + H_0^1(\Omega)$, în care vom căuta soluția, iar raționamentele anterioare rămân neschimbate. Din acest motiv spunem despre condiția Dirichlet că este una *esențială*.

Dacă $S_D = \emptyset$, și $g = 0$, atunci avem o problemă Poisson cu condiții Neumann nule. În acest caz funcționala biliniară are expresia:

$$\begin{aligned} a(v, u) &= (-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u(\varepsilon \operatorname{grad} v)) dx + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \\ &= - \int_{\partial\Omega} u g dA + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = a(u, v), \end{aligned} \quad (2.16)$$

iar funcțiile de test nu trebuie să mai aibă valori nule pe frontieră, deci $H = H^1(\Omega)$, spațiul Sobolev al funcțiilor de pătrat integrabil, cu derivate generalizate de pătrat integrabil. De astă dată, soluția satisface condițiile de frontieră, fără ca acestea să fie impuse de la început, ci ele rezultă în urma rezolvării problemei. Din acest motiv, spunem despre condițiile Neumann nule că sunt condiții de frontieră *naturale*. Problema cu condiții Neumann pe întreaga frontieră nu este corect formulată, deoarece nu are soluție unică. Problema poate îndeplini condițiile teoremei Lax-Milgram, doar dacă S_D se reduce la o mulțime oricât de mică dar de măsură nenulă $\operatorname{meas}(S_D) > 0$, pentru a avea punct de referință pentru potențial. Doar așa funcționala biliniară este coercivă. Altfel, potențialul este definit

univoc până la o constantă aditivă, care se fixează dacă se caută, de exemplu soluții cu medie nulă pe domeniul Ω , spațiu notat cu $H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. În consecință, în condiții de frontieră pur Neumann trebuie să *etalonăm* potențialul pentru a avea soluție unică.

Dacă valoarea condiției Neumann este nenulă, atunci problema are soluție, doar dacă integrala pe frontiera $\partial\Omega$ a condiției g este egală cu integrala pe Ω a densității de sarcină ρ (altfel este lezată legea fluxului electric, dacă valoarea fluxului pe frontieră nu este egal cu sarcina din interiorul domeniului). Folosind funcții cu medie nulă, condițiile de existență sunt automat îndeplinite. Forma slabă a ecuației

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall u \in H = H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (2.17)$$

are

$$\begin{aligned} a(v, u) &= \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx; \\ f(u) &= \int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Și de această dată condiția Neumann este *naturală*, iar în plus, așa cum era de așteptat, valoarea ei nenulă apare în expresia formei slabe a ecuației.

În *cazul mixt*, în care ambele suprafețe S_N și S_D sunt nevide, forma slabă a ecuației devine:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \rho u dv + \int_{S_N} u g dA, \quad \forall u \in H, \quad (2.19)$$

cu expresia funcționalei $a(u, v)$ dată de (2.18) și

$$f(u) = \int_{\Omega} \rho u dv + \int_{S_N} u g dA, \quad (2.20)$$

ecuație, care îndeplinește condițiile teoremei Lax-Milgram pentru $meas(S_D) > 0$, garantând astfel buna formulare a problemei [120, 133], [8]. De această dată spațiul Sobolev $H = \{u \in H^1(\Omega) | u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ asociat problemei mixte este cuprins între spațiul H_0^1 corespunzător problemei cu condiții Dirichlet nule și H^1 corespunzător problemei cu condiții Neumann nule. Acum se înțelege și mai clar cum se comportă condițiile de frontieră esențiale (Dirichlet) și cel naturale (Neumann). Cele esențiale sunt impuse ca restricții în spațiul funcțiilor de test, iar cele naturale intervin în expresia funcționalei de energie, deci implicit în expresia proiecției. Constatăm că pasul central în formularea matematică stă în identificarea cadrului funcțional, adică a spațiului complet al funcțiilor de test,

care include condițiile esențiale de frontieră. Alegerea nu este pur matematică ci pretinde înțelegerea perfectă a aspectelor fizice ale problemei, în particular a modului în care sursele externe de câmp se reprezintă prin condiții de frontieră.

Echivalența Ritz-Galerkin. În încheiere, remarcăm faptul că expresia funcționalei biliniare simetrice $a(v, u) = a(u, v)$ se poate obține pe cale variațională, prin derivarea **funcționalei de energie**, definită astfel:

$$\begin{aligned} F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) &\Rightarrow \min F(v) \Leftrightarrow dF = 0 \Leftrightarrow \frac{da(v, v)}{2} - df(v) = \\ &= \frac{a(dv, v) + a(v, dv)}{2} - f(dv) = a(u, v) - f(u) = 0, \forall u = dv. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Soluția problemei de câmp electrostatic minimizează deci funcționala de energie

$$F(V) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\varepsilon(\text{grad } V)^2 - \rho V)dv - \frac{1}{2} \int_{S_N} gVdA. \quad (2.22)$$

care este convexă în cazul în care $a(., .)$ este simetrică și pozitiv definită și în consecință, funcționala de energie are un singur minim în H .

Orice altă funcție de încercare pentru soluție are o "energie" mai mare decât cea corespunzătoare minimului. Aceasta este formularea variațională Ritz a problemei fundamentale a electrostaticii, în timp ce formularea variațională slabă, bazată pe proiecție este numită formularea Galerkin. Ce mai este specific metodei Galerkin este că funcțiile de test (pe care se proiectează reziduurile), ponderile din metoda reziduurilor ponderate sunt identice (sau izomorfe) cu funcțiile de formă - numite și de încercare, sau de "formă"(baza spațiului în care se caută soluția).

Se constată că în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic, cu operatori autoadjuncți, în care funcționala $a(., .)$ este simetrică, cele două formulări variaționale Ritz și Galerkin sunt echivalente, iar funcționala de energie este convexa. În continuare, vom utiliza de preferință forma slabă, Galerkin. Aceasta deoarece poate fi extinsă la cazul general al metodelor de proiecție, în care funcțiile de test nu sunt identice cu cele de formă, variantă a metodei cunoscută sub numele Galerkin-Petrov. Metodele de proiecție, inclusiv Galerkin pot fi aplicate folosind forma slabă a ecuațiilor (numită impropriu variațională) și în cazul problemelor cu operatori care nu sunt autoadjuncți (cum este cazul ecuațiilor parabolice sau hiperbolice, întâlnite în regimurile MQS, EQS și ED), pentru care nu există funcționala de energie convexa, care să fie minimă pentru soluție, deci metoda Ritz, de minimizare a unei funcționale de energie nu poate fi aplicată. În unele situații, cum este cazul regimului electrodinamic fără pierderi, se poate defini o funcțională de energie, care are un punct staționar, dar nu un minim, iar condiția de staționaritate (variație nulă, sau gradient nul al funcționalei) implică proiecția nulă a reziduului, deci forma slabă a ecuațiilor lui Maxwell, echivalentă metodei Galerkin [14], [64].

Metoda Galerkin face parte din tehnica rezidurilor ponderate, care constă în minimizarea reziduului ecuațiilor cu derivate parțiale, proiectându-le pe o mulțime de funcții de test, adică impunând ca integrala reziduului multiplicat cu funcțiile de pondere să se anuleze. După cum am mai menționat anterior, în metoda Galerkin funcțiile de test sunt chiar funcțiile folosite pentru a exprima soluția căutată. Un pas important în această abordare, constă în folosirea integrării prin părți, pentru a rescrie integralele, astfel încât ordinul operatorilor diferențiali de sub integrale să scadă cu o unitate. Abia după această transformare se obține forma slabă a ecuațiilor problemei. Modul în care abordările variaționale au condus, în final, la metoda elementului finit este prezentat în [44].

Formularea ecuațiilor prin minimizarea unei funcționale de energie este în mod evident corelată cu principii mai profunde ale fizicii, cum este cel al minimei acțiuni, sau altele similare de tip Lagrange, d’Alambert, Gauss, Hamilton, Maupertuis sau Rayleigh, așa cum se prezintă în detaliu în [3], [110], [82].

2.2 Teoreme de unicitate

În acest paragraf sunt prezentate teoremele de unicitate pentru soluția ecuațiilor regimurilor: ES - electrostatică, MG - magnetostatică, MQS - magneto-quasi-statică, ED - electrodinamic tranzitoriu și EDC - electrodinamic în complex. Teoremele celorlalte regimuri se obțin prin similitudine. Pentru a menține prezentarea simplă se vor considera doar materialele cu caracteristică afină sau liniară. Cazul materialelor neliniare generale, ca și demonstrațiile teoremelor pot fi găsite în [68].

2.2.1 Teorema de unicitate a regimului electrostatic ES

Ecuațiile fundamentale ale electrostaticii (1.93-1.95) în medii cu caracteristică dielectrică afină au soluția $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă sunt cunoscute densitatea de sarcină ρ , polarizația permanentă și tensorul permeabilităților $\bar{\epsilon}$ pozitiv definit (are valori principale strict pozitive) în orice punct din domeniu, și este îndeplinită una din următoarele trei condiții de frontieră:

- DN : În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta normală a inducției electrice $D_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$, astfel încât

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D}_n d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \rho dv; \quad (2.23)$$

- *ET*: În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta tangențială a intensității câmpului electric $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, astfel încât

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}_t d\mathbf{r} = 0, \quad \forall S \subset \partial\Omega; \quad (2.24)$$

- *MX*: În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie D_n fie $\mathbf{E}_t$, iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_E pe care este dat $\mathbf{E}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe: $S_E = \bigcup S_k, k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri electrice ψ_k de pe suprafețele S_k , sau valorile tensiunii electrice u_k , pe curbe din $\partial\Omega$ ce formează arbori cu nodurile în S_k (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Potențialul electrostatic scalar, soluție a ecuației (1.98), este unic determinat, dacă este cunoscută valoarea sa cel puțin într-un punct de pe frontieră. Deoarece este necesar ca punctul de referință să fie cunoscut, rezultă ca S_E nu poate fi vidă. Condiția de frontieră (*MX*) rescrie în termeni de potențial astfel:

- *MX*: orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este fie din mulțimea S_N pe care este data $D_n = -\varepsilon dV/dn$ fie din mulțimea S_D nevidă, pe care este dată valoarea potențialului, și care determină univoc $\mathbf{E}_t = -\mathbf{t}dV/dt$, fie din mulțimea S_E pe care se știe că potențialul este constant și implicit $\mathbf{E}_t = 0$, fără a se cunoaște în mod necesar valoarea constantei. Dacă S_E nu este conexă, ci formată din m părți conexe $S_E = \bigcup S_k, k = 1 : m$, echipotențiale (numite și borne sau terminale), atunci trebuie cunoscute valorile a $(m - 1)$ fluxuri electrice ψ_k pe suprafețele bornelor S_k sau valorile potențialelor electrice V_k , ale acestor borne (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu potențiale și reciproc), important este ca pe fiecare bornă "flotantă", cu excepția uneia "borna fixă - de referință" să se dea fie valoarea potențialului, fie valoarea fluxului.

Situația, numită mixtă (*MX*) sau hibridă este cazul cel mai general, *DN* și *ET* fiind cazuri particulare ale acesteia. Frontiera este partajată disjunct într-o parte cu condiții Neumann (S_N) - este dată derivata după normală a potențialului, una cu condiții Dirichlet (S_D) - este dată valoarea potențialului în orice punct al acestei suprafețe și o parte notată S_E , care la rândul ei poate fi formată din m suprafețe disjuncte, care reprezintă suprafețele unor conductoare. Știm că aceste suprafețe sunt echipotențiale fiecare, dar nu știm în mod necesar valoarea potențialului decât pentru $n > 0$ dintre ele, la celelalte sunt date sarcinile electrice (egale cu fluxurile acelor suprafețe). Din cele m conductoare, n au potențialul cunoscut iar pentru celelalte $(m - n)$ sunt cunoscute sarcinile fiecăreia. O astfel de situație se întâlnește, atunci când se extrage matricea capacităților unui sistem de m conductoare

scufundate într-un dielectric liniar, prin rezolvarea problemelor de câmp electrostatic.

Teorema energiei electromagnetice aplicată problemei de electrostatică oferă identitatea energetică:

$$2W = \int_{\Omega} \varepsilon (\text{grad } V)^2 dv = \int_{\Omega} \rho V dv - \int_{\partial\Omega} D_n dA, \quad (2.25)$$

baza teoretică a lemei soluției banale. Observând că ultima integrală se descompune în:

$$\int_{\partial\Omega} D_n dA = \int_{S_N} V D_n dA + \int_{S_D} V D_n dA + \sum_{k=1}^m V_k \int_{S_k} D_n dA, \quad (2.26)$$

termeni care se anulează fiecare în condițiile de frontieră menționate anterior, când acestea au valoare nulă. Fiecare termen din suma de m termeni se anulează fie pentru că $V_k = 0$, fie pentru că fluxul electric (egal cu sarcina conductoului) $\psi_k = 0$. Integrala din ρV se anulează pentru că $\rho = 0$, de unde din (2.25) rezultă că $W = 0$, deci că potențialul este constant în tot domeniul de calcul. Dar deoarece el este nul în punctul de referință, rezultă că problema are doar soluția nulă, în condiții de surse interne și de frontieră nule, ceea ce demonstrează lema soluției banale. Acesta este modul cel mai simplu de a verifica unicitatea soluției, chiar și la probleme complicate. Fiecare termen din expresia energiei pune în evidență o categorie de date ce trebuie știută pentru a avea o problemă bine formulată, cu soluție unică. Dacă acele date nu sunt corect specificate, energia sistemului nu este univoc determinată, deci problema nu este corect rezolvată.

În baza similitudinii dintre ecuațiile regimurilor: ES, MS și EC, teoreme de unicitate similare se enunță și în cazul regimurilor magnetostatic MS și electrocinetic staționar EC. Deosebirea este că, în aceste regimuri câmpul B respectiv J este solenoidal, deci se consideră $\rho = 0$.

Condiția ca domeniul de calcul să fie simplu conex este esențială, mai ales în regimul magnetostatic. Dacă de exemplu, câmpul dintr-un miez toroidal prin golul căruia trece curentul I este unul magnetostatic, intensitatea câmpului nu se anulează dacă pe frontiera torului $B_n = 0$, ci are valoarea $H = I/(2\pi r)$, proporțională cu curentul I . Mai mult, potențialul magnetic scalar are expresia $V = I\alpha/(2\pi)$, care nu este univocă, pentru unghiuri α care depășesc 2π . Pentru a obține unicitate, soluția este să se transfere torul într-un domeniu simplu conex, printr-o tăietură, cu un semiplan la care firul este muchie. Această tăietură interzice unghiului α să depășească valoarea 2π .

2.2.2 Teorema de unicitate a regimului magnetostaționar MG

Ecuatiile fundamentale ale regimului magneto-staționar (1.104-1.106) în medii cu caracteristică de magnetizare afină au soluția $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă sunt cunoscute densitatea de curent $\mathbf{J}$, inducția remanentă $\mathbf{B}_r$ și tensorul $\bar{\mu}$ pozitiv definit (are valori principale strict pozitive) în orice punct din domeniu, și este îndeplinită una din următoarele condiții de frontieră:

- BN : în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută componeneta normală a inducției magnetice $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, astfel încât

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} n d\mathbf{A} = 0; \quad (2.27)$$

- HT : în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componeneta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, astfel încât

$$\int_{\partial S} \mathbf{H}_t d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}, \quad \forall S \subset \partial\Omega; \quad (2.28)$$

- MX (mixtă): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie B_n în punctele mulțimii S_B , fie $\mathbf{H}_t$, în punctele mulțimii S_H , complementară suprafeței S_B , iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_H pe care este dat $\mathbf{H}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe disjuncte $S_H = \bigcup S_k$, $k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri magnetice φ_k de pe suprafețele S_k , sau valorile tensiunii magnetice i_k , ale câte unui punct de pe acea suprafață (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Expresia energiei magnetice dată de teorema energiei oferă identitatea energetică:

$$2W = \int_{\Omega} \nu (\text{rot} \mathbf{A})^2 dv = \int_{\Omega} \mathbf{J} \mathbf{A} dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S}, \quad (2.29)$$

bază teoretică a lemei soluției banale. Observând că ultima integrală se descompune în termenii:

$$\int_{S_B} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} + \int_{S_H} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} + \sum_{k=1}^m i_k \varphi_k, \quad (2.30)$$

care se anulează fiecare în condițiile de frontieră menționate anterior, atunci când acestea au valoare nulă. Integrala din $\mathbf{J} \mathbf{A}$ se anulează în condițiile lemei, pentru că $J = 0$, de unde rezultă că $W = 0$, deci ca potențialul magnetic vector este irotațional tot domeniul de calcul, ceea ce conduce la un câmp magnetic nul, iar

demonstrația este încheiată.

Condiția de frontieră (MX) este des întâlnită în practică, inclusiv partiția disjunctă a suprafeței S_H . De exemplu, atunci când se extrage matricea inductanțelor proprii și mutuale a unui sistem de bobine, dacă circuitul magnetic pe care sunt montate bobinele are terminalele magnetice echipotențiale pe frontiera domeniului de calcul. Pentru ca energia unui sistem de bobine filiforme este semiprodusul scalar $\varphi_i/2$, condiția de frontieră pentru fiecare terminal magnetic flotant, care asigură unicitatea este cunoașterea fie a fluxului terminalului φ , fie a potențialului său magnetic (egal cu curentul bobinei ce înconjoară terminalul).

Teorema se referă la unicitatea câmpului $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, dar nu și la cea a potențialului magnetic vector $\mathbf{A}$. Potențialul magnetic vector, care satisface condițiile de etalonare Coulomb este unic determinat, de condiții de frontieră ceva mai restrictive, decât cele pentru câmp. Condițiile de frontieră pentru unicitatea potențialului vector se enunță astfel:

- *BN* (Dirichlet vectorial): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută componeneta tangențială a potențialului vector $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ care permite determinarea univoca a inducției magnetice normale $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_t$;
- *HT* (Neumann vectorial): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată $\nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A})$, care determină componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = \nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ și în plus componenta normală a potențialului magnetic vector $A_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$;
- *MX* (mixtă): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ - în punctele mulțimii S_B , fie $\nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ și A_n , în punctele mulțimii S_H , complementara suprafeței S_B , iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_H pe care este dat $\mathbf{H}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe $S_H = \bigcup S_k$; $k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri magnetice φ_k de pe suprafețele S_k sau valorile tensiunii magnetice i_k , ale câte unui punct din acele suprafețe (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Se constată că pentru unicitatea lui $\mathbf{A}$ trebuie cunoscută în plus componenta sa normală A_n pe suprafața S_H , pe care este dată $\mathbf{H}_t$ (condiția Neumann vectorială). Pentru detalii privind unicitatea potențialului magnetic vector puteți consulta [30] sau [12].

Dacă domeniul de calcul este multiplu conex, atunci lucrurile se complică, pentru că pentru fiecare gaură de tip toroidal trebuie cunoscute condiții de frontieră suplimentare. Studiul poate fi adus la cazul structurii topologice banale a domeniului Ω , dacă toate găurile toroidale sunt eliminate prin "tăieturi" (suprafețe de secțiune,

care elimină golul) sau prin "adăugiri" (suprafețe care astupă golul). Structura topologică a unui astfel de domeniu este descrisă de graful sau, la care laturile sunt curbele mediane ale tronsoanelor elementare simplu conexe. De exemplu, graful circuitului feromagnetic al unui transformator trifazat (cu trei coloane) este alcătuit din trei laturi, are două noduri și două bucle fundamentale. Să ne imaginăm că domeniul de calcul este un circuit magnetic, atunci energia câmpului său magnetic generat de cei g curenți care trec prin găurile domeniului este

$$2W = \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}^2 dv = \sum_{k=1}^g \varphi_k u_k, \quad (2.31)$$

în care φ_k este fluxul magnetic ciclic (prin bucla fundamentală k) corespunzător solenației u_k .

Modul sistematic de a identifica buclele fundamentale este de a construi un arbore al grafului. Fiecare coardă k , parcursă de fluxul φ_k generează o buclă fundamentală cu t.m.m. u_k calculată de-a lungul laturilor buclei, deci pe o curbă închisă care inconjoară o "gaură" tubulară. Suprafața care se sprijină pe o astfel de curbă este o "adăugire", care dacă este reunită cu domeniul îl transformă în unul simplu conex. Tensiunea magnetică u_k este chiar solenația ce străbate această "adăugire". Fiecare ramură a arborelui în graf generează o secțiune fundamentală, cu flux total nul. Dacă ramurile sunt tăiate, atunci sunt eliminate toate buclele. Notând cu t numărul de tăieturi (egal cu numărul de ramuri), cu v_j saltul potențialului magnetic pe cele două fețe ale tăieturii, și cu φ_j fluxul magnetic prin tăietură, atunci energia câmpului magnetic are expresia:

$$2W = \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}^2 dv = \sum_{j=1}^t \varphi_j v_j. \quad (2.32)$$

Prin "tăieturi" și "adăugiri", domeniul multiplu conex se transforma în unul simplu conex.

În consecință, în cazul domeniilor multiplu conexe, condițiile de frontieră suplimentare, care trebuie cunoscute pentru a asigura unicitatea câmpului magnetic sunt:

- pentru fiecare tăietură (ramura în arbore) trebuie fie dat fluxul ce străbate tăietura fie saltul potențialului scalar de dublu strat, pe cele două fețe ale tăieturii;
- pentru fiecare adăugire (descrisă de o coardă în coarbore) trebuie dat fie fluxul ciclic ce străbate coarda fie t.m.m. de-a lungul buclei generată de coarda - egală cu solenția bobinei secționată de adăugire.

De exemplu, în cazul transformatorului trifazat, în care arborele este coloana centrală, unicitatea câmpului magnetic din miez este asigurată în condiții de frontieră $\mathbf{B}_n = 0$, de cunoașterea solenației bobinei de pe coloana centrală (care dă tensiunea magnetică a tăieturii) și de cunoașterea solenației bobinelor montate pe coloanele laterale, care dau solenațiile în cele două ferestre ale transformatorului (adăugirile din cazul nostru), sau în loc de solenații, de fluxurile celor trei bobine [122], [18], [51].

2.2.3 Teorema de unicitate a regimului magneto-cvasi-staționar MQS

Ecuațiile fundamentale ale regimului magneto-qvasi-staționar (1.138) în medii liniare cu condiții inițiale cunoscute pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ au soluția $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă tensorul $\bar{\sigma}$ este pozitiv definit în orice punct din domeniu, iar permeabilitatea μ este și ea pozitivă, și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric.

Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$. Demonstrația se bazează pe teorema energiei electromagnetice:

$$P_s = P + \frac{dW_m}{dt} \Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{E} \bar{\sigma} \mathbf{E} + \frac{dw_m}{dt} \right) dv \quad (2.33)$$

cu $w_m = \mathbf{B}\mathbf{H}/2 = \mu\mathbf{H}^2/2$ densitatea energiei magnetice, în cazul mediilor liniare. Integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)$ se anulează în condițiile lemei soluției banale și în consecință:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \bar{\sigma} \mathbf{E} dv = - \int_{\Omega} \frac{dw_m}{dt} dv > 0, \quad (2.34)$$

deoarece $\bar{\sigma}$ este pozitiv definit, relație care obligă la scăderea energiei magnetice. Dar această energie nenegativă prin definiție are valoare inițială nulă, deci nu poate scădea mai mult decât atât, ceea ce implică $W_m = 0, \forall t \in (t_{\min}, t_{\max})$, ceea ce corespunde unui câmp magnetic nul. Deoarece $P = 0$ și $\bar{\sigma} > 0$, rezultă că și câmpul electric $\mathbf{E}$ trebuie să se anuleze.

Chiar dacă este simplă, această teoremă de unicitate nu este prea utilă în cazurile practice. Și aceasta din două motive: condiția ca tot domeniul de calcul să fie conductor este prea restrictivă, iar condiția de frontieră pentru $\mathbf{E}_t$ este mai puțin utilă decât B_n , care intervenea în regimul magneto-staționar MG. În [12] se demonstrează o altă teoremă de unicitate pentru regimul MQS în medii liniare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, dar care pot avea și subdomenii izolate, cu $\sigma = 0$. În aceste

subdomenii câmpul MQS devine magnetostatic MS sau magnetic staționar MG. Pe interfețele de trecere între subdomenii se conservă $\mathbf{H}_t$ și B_n . O astfel de problemă, de regim MQS combinat cu MG are soluție unică, în condiții de frontieră similare cu cele de la regimul MG, adică dacă în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută:

- componenta normală a inducției magnetice $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, în punctele suprafeței S_B , și
- componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, în punctele suprafeței $S_H = \partial\Omega - S_B$.

Dacă se folosesc potențialele magnetic vector $\mathbf{A}$ și scalar V în domeniul conductor și doar $\mathbf{A}$ în domeniul neconductor, atunci condițiile de unicitate pentru aceste potențiale sunt și ele aceleași ca în cazul MG: se referă la $\mathbf{A}_t$ pe S_B și la $\nu \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{A}$ pe S_H , iar în plus cunoașterea pe suprafața S_H a componentei $A_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ a potențialului magnetic vector asigură unicitatea soluției, mai exact a potențialelor $\mathbf{A} - V$; $\mathbf{A}$ în domeniile conductoare; respectiv neconductoare, pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă sunt cunoscute condițiile inițiale pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \text{rot} \mathbf{A}$ cu $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) = 0$.

2.2.4 Teorema de unicitate a regimului electrodinamic - general variabil ED

Ecuatiile fundamentale ale regimului electrodinamic (1.148) în medii liniare cu condiții inițiale cunoscute pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ și $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ au soluția $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă ε și μ sunt strict pozitive iar σ nu este negativ (se pot admite părți izolante, fără pierderi în domeniul de calcul), și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric.

Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$. Demonstrația se bazează pe teorema energiei electromagnetice:

$$P_s = P + \frac{dW_{em}}{dt} \Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{E} \sigma \mathbf{E} + \frac{d w_{em}}{dt} \right) dv \quad (2.35)$$

unde s-a notat cu

$$w_{em} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} = \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \mu \frac{\mathbf{H}^2}{2}, \quad (2.36)$$

densitatea energiei electromagnetice, în cazul mediilor liniare. Integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)$ se anulează în

condițiile lemei soluției banale, și în consecință:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \sigma \mathbf{E} dv = - \int_{\Omega} \frac{dw_{em}}{dt} dv \geq 0, \quad (2.37)$$

deoarece σ nu este negativ, relație care obligă la scăderea energiei electromagnetice. Dar această energie nenegativă prin definiție are datorită condițiilor inițiale pentru câmp, valoare inițială nulă, deci nu poate scădea mai mult decât atât, ceea ce implică $W_{em} = 0, \forall t \in (t_{\min}, t_{\max})$, ceea ce corespunde unui câmp electromagnetic $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ nul în tot domeniul de calcul. Pe baza relațiilor de material se anulează și câmpurile $\mathbf{B}, \mathbf{D}$, și $\mathbf{J}$, iar pe baza legii fluxului electric se anulează și ρ din orice punct al domeniului de calcul.

Dacă se folosesc potențialele vector $\mathbf{A}$ și scalar V , atunci condițiile de unicitate pentru aceste potențiale se referă la valoarea potențialului scalar V în toate punctele frontierei; la $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ pe S_E ; și la $\nu \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}_t$ și A_n pe S_H , așa cum s-a văzut anterior.

2.2.5 Teoreme de unicitate pentru regimurile generale armonice EDC

Ecuatiile fundamentale ale regimului electrodinamic reprezentate în complex (1.155) au soluția $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă ε, μ și σ sunt strict pozitive în orice punct din domeniu, și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric. Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$.

O alternativă a acestei teoreme de unicitate este cea pentru *elementul multipolar de circuit electric* cu m terminale $S_1, S_2, \dots, S_m$ părți disjuncte ale $\partial\Omega$ (Fig. 2.1). Condițiile de pe S_E și S_H se înlociesc cu următoarele condiții de frontieră:

- $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = 0$ pe toate terminalele $S_k, k = 1, 2, \dots, m$;
- $\mathbf{n} \cdot (\text{rot} \mathbf{E}) = 0$ pe frontiera $\partial\Omega$;
- $\mathbf{n} \cdot (\text{rot} \mathbf{H}) = 0$ pe frontiera $\partial\Omega$, cu excepția terminalelor;
- pe fiecare terminal S_k , cu excepția celui de referință S_m , este dată fie valoarea potențialului complex $V_k = \int_{C_{km} \in \partial\Omega} \mathbf{E} dr$ fie valoarea curentului complex $I_k = \int_{\partial S_k} \mathbf{H} dr$ [122], [Bermudez], [Bossavit00Nonlocal].

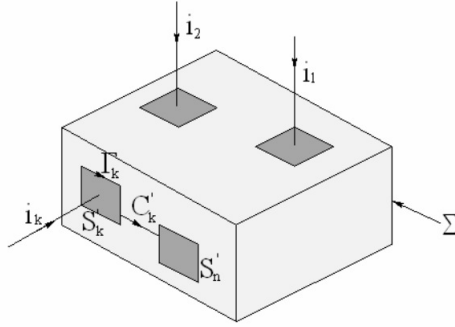


Figura 2.1: Element multipolar de circuit electric

Demonstrația se bazează pe forma complexă a teoremei energiei electromagnetice:

$$P_s = P + jQ \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Omega} (\mathbf{E} \sigma \mathbf{E}^* + j\omega (\mathbf{B} \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \mathbf{D}^*)) \cdot d\mathbf{V} \quad (2.38)$$

În cazul elementului electromagnetic de circuit electric, integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*)$ are expresia:

$$P_s = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m-1} V_k I_k^* \quad (2.39)$$

și se anulează în ipotezele lemei soluției nule, datorită condițiilor de frontieră din cele două teoreme de unicitate: $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$, V_k sau I_k . Numărul complex $P + jQ$ din membrul drept al identității energetice are, în consecință, nulă atât partea reală P cât și partea sa imaginară Q . Anularea puterii active P , implică anularea câmpului electric $\mathbf{E}$, deoarece $\sigma > 0$. Dar dacă se anulează puterea reactivă Q și câmpul electric $\mathbf{E}$, atunci se va anula și câmpul magnetic, rezultând unicitatea câmpului electromagnetic.

Chiar dacă pare excesiv de restrictivă, condiția ca domeniul să fie conductor, oricât de slab, dar să nu aibă părți perfect izolante, aceasta este justificată de faptul că în cavități izolante câmpul electromagnetic poate avea mai multe moduri distincte de a rezona, iar pentru fiecare, atât P cât și Q se anulează datorită absenței pierderilor și respectiv faptului că $\mathbf{B} \mathbf{H}^*$ și $\mathbf{E} \mathbf{D}^*$ se compensează reciproc.

În cazul elementului de circuit, teorema de unicitate garantează corecta definire și unicitatea potențialului V_k și a curentului I_k pentru fiecare terminal $k = 1, 2, \dots, m-1$. Datorită liniarității ecuațiilor, soluțiile I_k și V_k pentru terminalele controlate în potențial și respectiv în curent sunt funcții liniare complexe de datele problemei. Dacă primele n terminale sunt controlate în curent iar celelalte sunt controlate în

potențial, rezultă următoarea expresie pentru relația între semnalele de ieșire și cele de intrare:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{B}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

în care s-a notat cu a grupul primelor n terminale controlate în curent și cu b celălalt grup, care are $m - n$ terminale controlate în potențial. Această relație matriceală, pune în evidență funcțiile de transfer ale elementului multipolar de circuit excitat hibrid: $\mathbf{Z}_{aa}$ - matricea impedanțelor, $\mathbf{Y}_{bb}$ - matricea admitanțelor, $\mathbf{A}_{ab}$ - matricea factorilor de transfer în tensiune și $\mathbf{B}_{ba}$ - matricea factorilor de transfer în curent. Elementele acestor matrice sunt funcții complexe de frecvență, care descriu relația intrare-ieșire la diferite frecvențe, impusă de elementul multipolar electromagnetic de circuit. Definiția lor corectă este consecința teoremelelor de unicitate în regimul general variabil, dar dacă se consideră limita $\varepsilon \rightarrow 0$ atunci elementul devine anelectric și funcționează în regim MQS, fiind unul de tip inductiv-rezistiv cu $Q > 0$, în timp ce limita $\mu \rightarrow 0$ face ca elementul să devină unul amagnetic, care funcționează în regim EQS, ca un element capacitiv-rezistiv cu $Q < 0$.

O generalizare a condițiilor de frontieră se obține considerând un *element electromagnetic de circuit*. Acesta este un domeniu marginit, simplu conex, pe suprafața căruia deosebim n' suprafețe disjuncte, numite terminale electrice și încă n'' terminale magnetice. De această dată condițiile de frontieră au forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in \Sigma \setminus S''_k \\ \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{H}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in \Sigma \setminus S'_k \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in S'_k \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in S''_k \end{aligned} \quad (2.41)$$

Terminalele electrice pot fi controlate în curent, respectiv potențial:

$$i_k(t) = \int_{\Gamma_k = \partial S_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}; \quad v_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.42)$$

iar cele magnetice pot fi controlate în flux respectiv tensiuni magnetice:

$$\varphi'_k(t) = \int_{\Gamma_k = \partial S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}; \quad u_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.43)$$

De această dată puterea transferată prin frontiera domeniului este

$$P = \sum_{k=1}^{n'-1} (v_k i_k) + \sum_{k=1}^{n''} u_k \frac{d\varphi_k}{dt} \quad (2.44)$$

care evidențiază în baza lemei soluției nule toate tipurile condițiilor de frontieră trebuie impuse terminalelor (câte una pentru fiecare termen din aceste sume). Și aceasta teoremă de unicitate a fost extinsă, considerând elementul electromagnetic, multiplu conex de circuit CITATRE Timotin 71EMCE. În concluzie, constatăm importanța fundamentală a condițiilor de frontieră pentru modelarea electromagnetică. Aceste condiții trebuie să reflecte fenomenele fizice și cauzalitățile din dispozitivul de studiat. Deoarece matematica ne poate spune doar dacă o anumită condiție de frontieră este corectă sau nu, dar nu ne spune care este alegerea potrivită, această alegere trebuie făcută doar din considerente fizice, ceea ce presupune înțelegerea profundă a dispozitivului modelat și a relațiilor de cauzalitate specifice lui.

2.3 Existența și continuitatea soluției

2.3.1 Cadrul funcțional

Odată stabilite condițiile de frontieră, putem reveni la cadrul funcțional adecvat formulării corecte a problemei, pentru a exista soluție, iar aceasta să fie stabilă. Vom folosi următoarele spații funcționale:

- $L^2(\Omega) = \{u \mid \int_{\Omega} u^2 dv < \infty\};$
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \text{grad } u \in [L^2(\Omega)]^3\};$
- $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\};$
- $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \text{rot } \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3\};$

pe care le vom numi spațiile: funcțiilor de pătrat integrabil, derivabile generalizat, div-conforme și rot-conforme (http://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space). Acestea sunt spații Hilbert cu produsele scalare:

- $(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv \, dx, u, v \in L^2(\Omega);$
- $(u, v)_1 = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + (u, v)_0, u, v \in H^1(\Omega);$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{div}} = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{v} \, dx + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega);$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{rot}} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega);$

iar normele induse de acestea vor fi notate cu $\|u\|_0, \|u\|_1, \|\mathbf{u}\|_{\text{div}}, \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}}$. Așa cum am mai menționat anterior, dacă domeniul Ω este suficient de neted, de exemplu este de tip Lipschitz, atunci se poate defini urma unui element din spațiile Sobolev menționate anterior pe frontiera și se pot demonstra teoremele lui Green:

- $\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \, dx = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \, d\mathbf{A}, u \in H^1, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}).$

Dacă adăugăm condițiile de frontieră esențiale: Dirichlet $V = 0$, componenta normală nulă și respectiv componenta tangențială nulă se obțin subspațiile

- $H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v(\partial\Omega) = 0\};$
- $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ pe } \partial\Omega\};$
- $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}.$

Trebuie să remarcăm faptul că datorită celebrei teoreme de urmă din spațiile Sobolev (http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space), putem vorbi despre urma pe frontiera unui domeniu lipschitzian, chiar dacă valoarea locală a funcției nu are sens nici în spațiile Sobolev nici în L^2 . Urmele de pe frontieră alacătuiesc și ele un spațiu Hilbert de indice fracționar $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Pe suprafețele de discontinuitate, sunt continue:

- $v_1 = v_2$, dacă $V \in H^1(\Omega)$, continuitatea valorii;
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2$ dacă $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$, continuitatea componentei normale;
- $\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_2$ dacă $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$, continuitatea componentei tangențiale.

Pentru a înțelege proprietățile de transfer ale celor trei operatori de derivare spațială se introduc nucleele ($\ker$) și imaginile (Im - range) acestor operatori astfel:

- $\ker(\operatorname{grad}) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{grad} v = 0\}; \operatorname{grad} H^1(\Omega) \subset \ker(\operatorname{rot}) :$
- $\ker(\operatorname{div}) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}; \operatorname{div} \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \subset L^2(\Omega);$
- $\ker(\operatorname{rot}) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0\}; \operatorname{rot} \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \subset \ker(\operatorname{div}).$

Realizațiile de incluziune ale imaginilor menționate anterior în nuclee, se datorează identităților clasice satisfăcute doar de operatorii de derivare spațială:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0; \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (2.45)$$

Aceste relații de incluziune devin relații de identitate, dacă domeniul Ω este un domeniu suficient de neted, de exemplu, dacă este lipschitzian, marginit și simplu conex. De exemplu, egalitatea $\ker(\operatorname{rot}) = \operatorname{grad} H^1(\Omega)$ ne spune că în aceste condiții, orice câmp irotațional are un potențial scalar al cărui gradient este, iar egalitatea $\ker(\operatorname{div}) = \operatorname{rot} \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ spune faptul că orice câmp solenoidal are un potențial vector, al cărui rotor este. În consecință, se ajunge la teorema care dă

descompunerea Helmholtz: orice câmp vectorial $\mathbf{u}$ admite un potențial scalar V și un vector $\mathbf{A}$, adică se descompune unic în două părți ortogonale:

$$\mathbf{u} = \text{grad } V + \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.46)$$

$V \in \text{grad } H^1(\Omega)$ și $\mathbf{A} \in \text{rot } H(\text{rot}, \Omega)$, $\forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3$. Produsul scalar al celor două componente, adică integrala produsului dintre ele pe domeniul problemei are valoare nulă. În consecință, orice câmp vectorial este univoc determinat de divergența și rotorul său, teorema garantând existența și unicitatea celor două potențiale, deci buna formulare a problemei de câmp [109]. Aceasta afirmație, care se aplică, evident și câmpurilor electrice și magnetice este cunoscută sub numele de **teorema fundamentală a analizei vectoriale**, dar probabil că este una din cele mai profunde descoperiri matematice, permițând structurarea cunoștințelor noastre despre modul în care este descrisă lumea fizică.

Relațiile stabilite de operatorii diferențiali între spațiile de funcții, prezentate anterior se reprezintă printr-o elegantă construcție matematică, o secvență de operatori, numită **complexul de Rham**:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\text{rot}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} 0 \quad (2.47)$$

În condițiile specificate anterior pentru netezimea domeniului Ω , această secvență este exactă, adică imaginea unui operator coincide cu nucleul operatorului succesiv:

$$\begin{aligned} \ker(\text{grad}) &= \mathbb{R}; \quad \ker(\text{rot}) = \text{grad } H^1(\Omega); \\ \ker(\text{div}) &= \text{rot } \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega); \quad L^2(\Omega) = \text{div } \mathbf{H}(\text{div}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.48)$$

ceea ce garantează existența potențialelor scalar și vector. Dacă ne referim la câmpuri cu condiții pe frontiera $\partial\Omega$ esențiale nule, atunci sub-secvența de Rham:

$$\mathbb{R} \rightarrow H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega) \rightarrow \{0\} \quad (2.49)$$

își pastrează din nou caracterul exact [133].

Aplicarea complexului de Rham la mărimile câmpului electromagnetic conduce la o construcție mai elaborată, numită **diagrama lui Tonti** (2.2) [123]. Aici sunt evidențiate atât mărimile câmpurilor, corpurilor și potențialele, precum și relațiile dintre ele, impuse prin legi sau prin definiții. Spre deosebire de complexul de Rham [15] în care apar doar operatori de derivare spațială, în diagrama Tonti apar și derivatele temporale. Cele patru coloane din această diagramă, numită și casa lui Maxwell sunt de fapt secvențe de Rham. În diferite regimuri ale câmpului electromagnetic aceasta diagramă se simplifică în mod corespunzător, prin eliminarea unor coloane. Pentru mai multe detalii referitoare la acest cadru funcțional puteți consulta [133], [18], [64] sau [62].

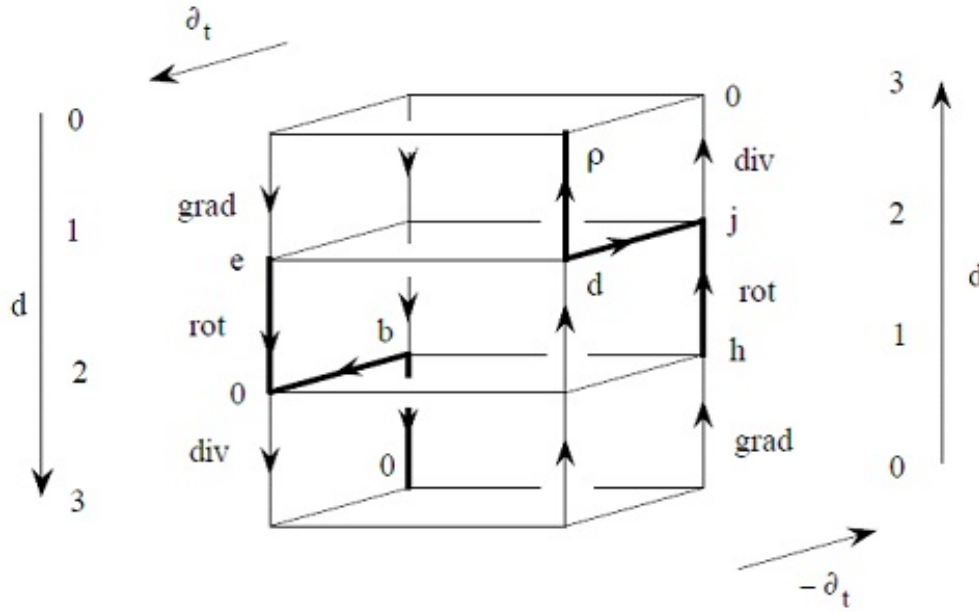


Figura 2.2: Diagrama Tonti pentru câmpul electromagnetic [18]

2.3.2 Formularea corectă a problemei *rot-rot*

Am văzut în capitolul 2.1. cum buna formulare, existența, unicitatea și stabilitatea soluției pentru forma slabă a problemelor de regim staționar cu potențial scalar este o consecință a teoremei Lax-Milgram. Singurul regim staționar care nu satisface acest cadru funcțional este cel magneto-staționar, descris de ecuațiile cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} \Rightarrow \operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \text{ cu } \operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \nu \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (2.50)$$

și cu condițiile de frontieră:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ pe } S_B \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \text{ pe } S_B, \quad (2.51)$$

condiție esențială (poate fi nenulă), și

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \Rightarrow \mathbf{n} \times (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \text{ pe } S_H = \partial\Omega \setminus S_B, \quad (2.52)$$

condiție naturală și care au forma slabă: $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in H_0(\text{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$, în care

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} dx; \\ f(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s d\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

iar soluția $\mathbf{v}$ este căutată în sptiul H_0 (sau în cel afin, translatat față de H_0 , în cazul condiției nenule pe S_B).

Aceste relații pot fi extinse la mediile neliniare magnetic în două feluri, fie în mediile izotrope se consideră ν dependent de $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}(\text{rot} \mathbf{v})$, fie se consideră $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I}$, în care $\mathbf{I}$ este polarizația magnetică, dependentă de $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$. În ultimul caz, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c - \text{rot} \mathbf{I}$ este suma dintre curentul de conducție și cel Amperian de polarizație magnetică iar $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{cs} - \text{rot}_s \mathbf{I}$, ceea ce face ca (2.52) să devină $\mathbf{n} \times (\nu \text{rot} \mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{J}_{sc}$ [78].

Funcționala din (2.53), funcționala $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nu mai este coercivă, și în consecință potențialul magnetic vector nu este unic. Excepție face cazul 2D, cu două componente ale câmpului și o singură componentă a curentului și potențialului vector, care este automat etalonat. Deci în 3D teorema Lax-Milgram nu se poate aplica direct în cazul regimului magneto-staționar, pentru determinarea potențialului magnetic vector. Pentru a ieși din acest impas s-au găsit mai multe solutii.

- **Etalonarea Coulomb.** Așa cum s-a procedat în cazul problemei Lapalce-Poisson cu condiții pure Neumann, pentru a asigura unicitatea potențialului se folosește etalonarea acestuia. În cazul potențialului magnetic vector, aceasta se realizează prin condiția Coulomb (1.121) și prin adăugarea condiției de frontiera $A_n = 0$ pe S_B .
- **Regularizare.** O altă abordare, numită de regularizare, constă în adăugarea la funcționala biliniară a unui termen coerciv, ponderat cu un parametru ε [Costabel91]:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} dx + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} dx. \quad (2.54)$$

Condiția de coercitivitate este acum îndeplinită din nou și problema este bine formulată, oricât de mic ar fi ε . Soluția găsită este apoi trecută la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

- **Cu multiplicator Lagrange.** În cazul formei slabe de tip *rot-rot*, altă abordare posibilă constă în extinderea teoremei Lax-Milgram, astfel încât extensia să poată fi aplicată la probleme variaționale cu multiplicatori Lagrange,

care nu au puncte de minim, ci puncte critice de tip şa. O astfel de extensie este realizată de teorema lui Brezzi, ceea ce permite să se demonstreze că problemele de câmp magnetic vectorial cu soluție unică, în forma lor slabă sunt bine formulate. [20], [133], [64], [109].

- **Cu potențial scalar redus.** O altă abordare diferită pentru analiza câmpului în regim MG constă în folosirea potențialului magnetic scalar redus [78]. În această lucrare sunt prezentate pe lângă acest potențial și alte formulări, cu diferite potențiale ale câmpului în regim MQS.

Asupra acestor aspecte vom mai reveni, în capitolul următor, când vom discuta despre construcția efectivă a soluției numerice.

2.3.3 Regimuri variabile.

Problemele de regim variabil cer și ele un cadru funcțional adecvat, dar pentru a simplifica lucrurile vom discuta buna lor formulare, după reprezentarea în complex sau în operațional, prin transformata Laplace. Cadrul funcțional adecvat și demonstrarea bunei formulări în regim magneto-quasi-static MQS tranzitoriu este prezentată în

[26]. O altă abordare constructivă constă în discretizarea derivatelor față de timp, care apar în ecuațiile regimurilor variabile în timp, cu diferențe finite implicite. La fiecare pas de timp trebuie rezolvată o ecuație cu derivate parțiale *div-grad* sau *rot-rot*, de tip Helmholtz, care, după cum se va demonstra mai jos, este corect formulată. În condițiile în care convergența discretizării în timp este asigurată, există și limita, care este soluția problemei continue. Detalii privind această abordare vor fi date în capitolul 3, referitor la modelarea numerică.

Tot la o ecuație Helmholtz se ajunge, dacă regimul tranzitoriu al câmpului electromagnetic este analizat prin metode operaționale, bazate pe transformate de tip Fourier sau Laplace, iar în particular, folosind aproximările discrete: Discrete Fourier Transform - DFT, sau Fast Fourier Transform - FFT (http://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform).

Formularea corectă pentru ecuația Helmholtz. În regim armonic, după reprezentarea în complex, câmpul satisface ecuațiile (1.158-1.161) de tip Helmholtz:

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{u}) + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{J} \quad (2.55)$$

cu condiții de frontieră de tipul:

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ pe } S_N; \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{h} \text{ pe } S_D = \partial\Omega - S_N. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Forma slabă a acestei probleme caută soluția $\mathbf{u}$ în $H_D(\text{curl}, \Omega, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{h}$ pe S_D) a.î.

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} \, dx + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} + \int_{S_N} \mathbf{u} \mathbf{h} d\mathbf{A}, \quad (2.57)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_{D0}(\text{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ pe } S_D).$$

Deoarece funcționala biliniară (mai corect spus forma sesquilineară, pentru că este complexă) este marginită și coercivă, condițiile teoremei Lax-Milgram sunt îndeplinite cu constantele [109]:

$$c = \min \left\{ \inf_{x \in \Omega} \mu^{-1}(x), \inf_{x \in \Omega} \gamma(x) \right\} \quad (2.58)$$

$$C = \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \mu^{-1}(x), \sup_{x \in \Omega} \gamma(x) \right\}$$

și în consecință problema are soluție, iar aceasta este stabilă.

Revenind în domeniul timpului, constatăm că multe dintre problemele practice, atât de regim tranzitoriu cât și de regim armonic sunt probleme de curenți turbionari. La acestea domeniul modelat are o parte conductoare (D_c) și o parte izolantă, de obicei aer (D_a), dar care este sediul unor curenți cu densitate cunoscută $\mathbf{J}_0$. În consecință, regimul câmpului este MQS în conductor și MG în izolat (Fig. ...), având ecuațiile:

$$D_a : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad D_c : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.59)$$

Legătura dintre ele este realizată de condițiile de interfațare de pe suprafața:

$S_{ac} : \nabla_s \cdot \mathbf{B} = 0; \nabla_s \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_c \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_c) = 0; \mathbf{n}_c \times (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_c) = 0 \Rightarrow B_{an} = B_{cn}; \mathbf{H}_{at} = \mathbf{H}_{ct}$, la care se adaugă faptul că pe această suprafață, componenta normală a curentului se conservă, deci curenții bin conductor satisfac condiția de frontieră : $S_{ac} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$.

Domeniul de calcul $\Omega = D_a \cup D_c$ este mărginit de frontiera $\partial\Omega = S_{Ha} \cup S_B \cup S_{Hc} \cup S_E$ partiționată în primele două fețe de pe frontiera domeniului neconductor și ultimele două pe frontiera domeniului conductor, pe care sunt îndeplinite condițiile de frontieră:

$S_{Ha} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s$, dar de obicei frontiera nu este pânză de curent și $S_{Hc} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$,

condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp pică perpendicular sau la suprafața domeniilor feromagnetice ideale;

$S_B : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = b$, dar de obicei $S_B : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp se preling fără să le traverseze, sau pe suprafețele aflate la depărtare suficient de mare, ca valoarea componentei normale a inducției să se anuleze.

$S_{Hc} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp pică perpendicular sau la suprafața domeniilor feromagnetice ideale;

$S_E : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie sau nu, care sunt echipotențiale electric (de exemplu, pe electrozii de potențial cunoscut), pe care liniile de câmp electric pică perpendicular.

Consecință a acestor condiții, rezultă: $S_{Hc} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$; $S_E : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, ceea ce înseamnă că S_{Hc} este marginea conductorului spre un dielectric, iar S_E nu este traversată de linii ale câmpului magnetic.

Exprimând câmpul magnetic din D_a în funcție de potențialul său vector $\mathbf{A}$ și câmpurile electric și magnetic din D_c , în funcție de potențialul vector $\mathbf{A}$ și cel scalar V se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} D_a : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 ; \\ \mathbf{H} = \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right. \\ D_c : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I} \\ \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Din care, după eliminarea densității de curent și a câmpului electric, se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} D_c : \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla \times \mathbf{I} &= 0; \\ \nabla \cdot \left(\sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

satisfăcute de $\mathbf{A}$ - V în D_c , la care se adaugă ecuația potențialului $\mathbf{A}$ din D_a :

$$\nabla \times (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0. \quad (2.62)$$

După cum se va vedea în paragraful 3.6.1, introducerea în ecuații a termenilor care conțin divergența potențialului vector nu fac decât să întărească condiția de

etalonare a lui Coulomb.

Condițiile de frontieră și de interfață ale acestor trei ecuații sunt următoarele:

$$S_{Ha} : \nu_0(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0; \quad (2.63)$$

$$S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{A} = \alpha; \quad \text{dar de obicei } S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.64)$$

$$S_{Hc} : (\nu \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{I}) \times \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$S_E : \mathbf{n} \times \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0; \quad V = V_0; \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} S_{ac} : \mathbf{n}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_a - \nabla \times \mathbf{A}_c) &= 0; \\ \mathbf{n}_c \times (\nu_0(\nabla \times \mathbf{A}_a) - \nu \nabla \times \mathbf{A}_c + \mathbf{I}) &= 0; \\ \mathbf{n}_c \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}_c}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Forma slabă a acestor ecuații, în care potențialul vector satisface implicit condiția de etalonare Coulomb este:

$$\begin{aligned} & \int_{Da} (\nu_0(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu_0 \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A}) d\Omega + \\ & + \int_{Dc} \left(\nu(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \\ & \int_{Da} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega - \int_{Dc} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{I} d\Omega + \int_{S_{Ha}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_s dS \\ & \int_{Dc} \sigma \nabla N \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Aici s-a notat cu $\mathbf{W}$ o funcție arbitrară de test vectorială și cu N o funcție arbitrară de test scalară, dar care satisfac următoarele condiții esențiale de frontieră:

$$S_{Hc} \cup S_{Ha} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = 0; \quad S_E \cup S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{W} = 0; \quad S_E : N = 0. \quad (2.69)$$

Dacă domeniul conductor are conductivitatea σ constantă, atunci potențialul scalar V poate fi ales nul, iar soluția problemei este dată doar de potențialul vector $\mathbf{A}$, definit în întregul domeniu de calcul.

Dacă potențialul vector nu este etalonat, problema nu are soluție unică. Chiar și

aşa, după cum se va vedea în capitolul următor, această problemă neetalonată stă la baza unor metode de calcul numeric mai eficiente decât cele bazate pe potențial vector etalonat. Deoarece din ecuații dispar în acest caz cei doi termeni, care se referă la divergența potențialului vector, ei dispar și din forma slabă neetalonată, care devine mai simplă:

$$\begin{aligned} & \int_{D_a} \nu_0 (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega + \\ & + \int_{D_c} \left(\nu (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \quad (2.70) \\ & = \int_{D_a} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{T}_0 d\Omega - \int_{D_c} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Id} d\Omega. \end{aligned}$$

Pentru a descrie curenții sursă, aici s-a folosit potențialul lor vector $\mathbf{T}_0$:

$$\nabla \times \mathbf{T}_0 = \begin{cases} \mathbf{J}_0 & \text{în } D_a \\ 0 & \text{în } D_a \end{cases} \quad \text{cu } \mathbf{T}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \text{ pe } S_{Ha}. \quad (2.71)$$

Aceasta face ca distribuția de curent, dată a problemei să fie implicit strict solenoidală, chiar și în urma aproximărilor datorate rotunjirilor, trunchierilor sau altor erori numerice.

Evident că aceste relații se transformă în ecuații complexe, atunci când se preferă studiul în domeniul frecvenței, prin transformată Laplace sau reprezentare în complex.

Discuția privind modul efectiv de formulare a problemei și de găsim a soluției în regimurile dinamice va fi aprofundată în capitolul următor dedicat abordărilor numerice.

2.3.4 Formulări complementare

O abordare funcțională diferită, pentru problemele de câmp magnetic este propusă în [21]. Aici se operează cu ambele câmpuri $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ ca necunoscute (sau cu potențialele lor, lucru ce asigură satisfacerea automată a ecuațiilor regimului magnetostatic), minimizarea aplicându-se erorii cu care este satisfăcută ecuația constitutivă de legătură între $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$. Definind funcționala care va fi minimizată ca norma rezidului ecuației constitutive, rezultă:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - f(\mathbf{H})]^2 dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\text{rot} \mathbf{A} - f(-\text{grad } V_m)]^2 dv, \forall \mathbf{B} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega), \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Abordarea poate fi extinsă și în regimul magneto-staționar, dacă la funcțională se adaugă factori penalizanti, care descriu constrângerile impuse de relațiile Gauss și Ampère:

$$F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - f(\mathbf{H})]^2 + \frac{k_1}{\mu} (\operatorname{div} \mathbf{B})^2 + k_2 \mu (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J})^2 \right] dv. \quad (2.73)$$

În cazul afin, funcționala devine:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - \mu \mathbf{H} - \mathbf{B}_r]^2 dv \Rightarrow dF(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} - \mu \mathbf{H} - \mathbf{B}_r) d(\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}) dv = 0, \\ \forall d\mathbf{B} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad d\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.74)$$

care implică următoarele forme variaționale pentru cele două potențiale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mu \operatorname{grad} V - \mathbf{B}_r) \operatorname{rot} \mathbf{A}' dv &= 0, \\ \int_{\Omega} (\mu \operatorname{grad} V - \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{B}_r) \operatorname{grad} V' dv &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Deoarece, conform teoremei lui Tellegen, câmpul $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sunt ortogonale, ecuațiile (2.75), satisfăcute de cele două potențiale capătă următoarele forme slabe, mai simple:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \operatorname{rot} \mathbf{A}' dv &= 0, \\ \int_{\Omega} (\mu \operatorname{grad} V + \mathbf{B}_r) \operatorname{grad} V' dv &= 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

În această abordare, sunt analizate simultan cele două formulări complementare pentru potențialul vector și pentru potențialul scalar al câmpului magnetic, iar erorile de metodă sunt transferate caracteristicii de material. O astfel de abordare se poate aplica și câmpurilor electrostatice sau electrocinetice. Fiecare din perechile formate din câmpurile $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$, sau respectiv $(\mathbf{E}, \mathbf{J})$ se reprezintă prin potențialele "complementare" scalar V sau vector $\mathbf{T}$.

Faptul că cele două reprezentări duale sunt echivalente este evident în cazul regimului electrocinetic, în care $\mathbf{E}$ este irotațional și $\mathbf{J}$ este solenoidal. Nu există deci un motiv profund care să privilegieze reprezentarea coulombiană (prin V) față de cea amperiană (prin $\mathbf{T}$), în afara celui pragmatic, în baza căruia V fiind scalar are doar o componentă, față de $\mathbf{T}$, care fiind vector are 3 componente, în cazul general

3D. În cazul 2D și acest motiv dispare, deoarece $\mathbf{T}$ are și el o singură componentă. Când se folosește potențialul scalar V , pe suprafața de frontieră S_E se impune o condiție Dirichlet pentru acest potențial, iar pe $S_J = \partial\Omega - S_E$ se impun condiții Neumann. În schimb, când se folosește potențialul vector, lucrurile se inversează: condiția de frontieră pe S_E este de tip Neumann - se referă la derivata potențialului vector, mai exact $\mathbf{E}_t = \rho \mathbf{J}_t = \rho \mathbf{n} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{n}) = \rho \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n})$ în timp ce condiția de frontieră pe S_J este de tip Dirichlet - se referă la $\mathbf{T}_t$, iar $\mathbf{J}_n = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{T}_t$. Dualitatea reprezentărilor complementare se păstrează și în cazul regimurilor electrostatic și magneto-staționar, chiar dacă aparent în primul este preferată reprezentarea coulombiană prin potențialul scalar (datorită faptului că $\mathbf{E}$ este irotațional), iar în al doilea caz este preferată reprezentarea amperiană, prin potențialul vector $\mathbf{A}$ (datorită faptului că $\mathbf{B}$ este solenoidal). Din considerente de simetria dualității, câmpul electrostatic poate fi reprezentat la fel de bine prin potențialul vector redus $\mathbf{T}'$ al inducției electrice: $\mathbf{D} = \mathbf{D}_s + \text{rot} \mathbf{T}'$, cu $\text{div} \mathbf{D}_s = \rho$, iar câmpul magnetostationar prin potențialul scalar redus ϕ' al intensității câmpului magnetic: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad} \phi'$, cu $\text{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}$. În fiecare regim, cele două formulări duale reprezintă "*fața longitudinală*" (fața $\mathbf{E}$ sau $\mathbf{H}$) respectiv "*fața transversală*" (fața $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ sau $\mathbf{J}$) a câmpului din regimul respectiv.

Cele două reprezentări complementare au nu numai o importanță teoretică ci și una practică, fiecare generând o metodă diferită de calcul numeric, pentru care cele două soluții duale sunt încadrări ale soluției exacte.

În concluzia acestui capitol, indicăm spațiile de funcții, cărora le aparțin diferitele mărimi locale ale câmpului electromagnetic:

- intensitatea câmpului electric și magnetic: $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega); \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega);$
- inducția electrică și magnetică: $\mathbf{D} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \mathbf{B} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega);$
- potențialul electric scalar: $V \in H^1(\Omega)$, cu $\mathbf{E} = -\text{grad} V$;
- potențialul magnetic scalar: $V_m \in H^1(\Omega)$, cu $\mathbf{H} = -\text{grad} V_m$;
- potențialul magnetic vector: $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, cu $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$.
- potențialul vector al densității de curent: $\mathbf{T} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, cu $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{T}$;

Bineînțeles că în cazul fiecărei probleme modelate, intervin restricții suplimentare, referitoare în primul rând la condițiile de frontieră esențiale. Trebuie să remarcăm că determinarea câmpurilor cu potențial vector cere o atenție deosebită, deoarece abordarea scalară, pe componente nu dă rezultate bune, după cum se va vedea în capitolul următor. Soluția acestor probleme nu trebuie căutată în $[H^1(\Omega)]^3$, ci în $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, deci trebuie să fie rot-conformă.

În Tabelul 2.1 sunt sintetizate formele tari și cele slabe: $a(v, u) = f(u)$, $\forall u \in H_0g$ ale principalelor ecuații întâlnite în diferite regimuri ale câmpului electromagnetic. Funcționalele de energie sunt $F(v) = (1/2)a(v, v) - f(v)$. În literatură se întâlnesc multe alte formulări, specifice diferitelor probleme concrete, care au fiecare diverse avantaje. Ele nu trebuie privite ca rețete, ci ca exemple de raționamente, prin care, pornind de la fenomenele fizice esențiale se realizează modelarea matematică a dispozitivului analizat, adică se formulează corect problema de câmp în termeni exclusiv matematici.

Regimul	solutia:	Ecuatia de ord. II	$a(u, v)$ $f(v)$	Spatiu H_{σ} al funcțiilor de încercare Spatiu H_0^g al funcțiilor de test
ES:	V	$\nabla (\varepsilon \nabla V) = -\rho + \nabla \mathbf{P}_p$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MS:	V_m	$\nabla (\mu \nabla V_m) = \nabla \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MS:	$\mathbf{A}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EC:	V	$\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla (\sigma \mathbf{E}_i)$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EC:	$\mathbf{T}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{T}) = \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MG: V'	$\mathbf{A}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EQS:	V	$\nabla \left(\sigma \nabla V + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \nabla V) \right) = \nabla \left(\mathbf{J}_i + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_p \right)$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx$ $\int_{\Omega} \rho u dv + \int_{\partial\Omega} u g dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MQS:	$\mathbf{A}, V$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J}_i = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) + \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right)$ $\nabla (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \mathbf{J}_i \Rightarrow -\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla \left(\sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{J}_i \right)$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s d\mathbf{A}$	$H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = A_t \text{ pe } S_B)$ $H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$
ED:	$\mathbf{A}, V$	$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}; \Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s d\mathbf{A}$	$H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = A_t \text{ pe } S_B)$ $H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$
EDC:	$\mathbf{A}, V$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = (\sigma + j\omega\varepsilon) (-j\omega \mathbf{A} + \nabla V)$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} dx + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} + \int_{S_N} \mathbf{u} h d\mathbf{A}$	$H_{D0}(\operatorname{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = h \text{ pe } S_D)$ $H_{D0}(\operatorname{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ pe } S_D)$

Tabela 2.1: Formele tari și slabe ale ecuațiilor regimurilor câmpului el-mg

Modelarea cu MEF

3.1 Concepte fundamentale

3.1.1 Definitia elementului finit

Cadrul natural de descriere a metodei elementului finit pentru analiza numerică a problemelor de câmp este forma variațională slabă, de tip Galerkin prezentată anterior, în care problema este reformulată astfel: găsiți $v \in X$, a.î. $a(v, u) = f(u)$, $\forall u \in X$.

Așa cum este normal, în urma discretizării, soluția problemei este căutată într-un spațiu finit dimensional, pe care o să îl notăm X_h . Dacă $X_h \subset X$, atunci spunem că discretizarea este conformă, iar soluția numerică se obține prin rezolvarea unei probleme, similară cu cea anterioară:

$$\text{găsiți } v_h \in X_h, \text{ a.î. } a(v_h, u_h) = f(u_h), \forall u_h \in X_h. \quad (3.1)$$

De regulă, h este un parametru real, care descrie discretizarea (de exemplu, norma rețelei, definită ca lungimea laturii maxime), iar în condiții rezonabile, dacă $h \rightarrow 0$, atunci soluția numerică $u_h \in X_h$ converge către soluția exactă $u \in X$, deci $X_h \rightarrow X$.

X_h fiind un spațiu finit dimensional, elementele sale se exprimă prin combinații liniare ale *funcțiilor de bază* (numite și "funcții de formă" sau funcții de încercare, sau interpolare) : $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$:

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i^h \varphi_i, \quad (3.2)$$

în care numerele u_i se numesc *grade de libertate*. Trebuie să remarcăm un fapt neplăcut, în literatură unii autori notează cu N_i gradele de libertate, în timp ce

alții folosesc această notație pentru funcțiile de formă. Oricum spațiul funcțiilor de formă și cel al gradelor de libertate sunt duale, iar soluția numerică este "produsul scalar", mai corect produsul de dualitate al elementelor din cele două spații duale. Dacă înlocuim această expresie în (3.1), se obține sistemul de N ecuații algebrice liniare:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.3)$$

cu $\mathbf{A} = [a(\varphi, \varphi_j)] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{f} = [f(\varphi_j)] \in \mathbb{R}^N$ și $\mathbf{u} = [u_i^h] \in \mathbb{R}^N$.

Metoda elementului finit este o metodă de tip Galerkin, cu următoarele *trei caracteristici definitorii* [133]:

- Domeniul $\bar{\Omega} \in \mathbb{R}^d$ cu $d = 1, 2$ sau 3 mărginit, cu frontiera netedă pe porțiuni este acoperit de o triangulație $\mathcal{T}_h$, de exemplu o reuniune disjunctă de elemente poliedrale sau poligonale K ;
- Spațiul X_h constând din polinoame definite pe porțiuni, mai exact restricția funcției $u_h \in X_h$ pe elementul $K \in \mathcal{T}_h$ este un polinom de variabilele spațiale x, y și/sau z ;
- X_h are o bază φ cu suport local, numite funcții de formă, de exemplu funcțiile polinomiale definite pe porțiuni, care se anulează în toate elementele $K \in \mathcal{T}_h$, cu excepția celor care au un element geometric comun (nod, latură sau față).

Pe scurt, în metoda elementului finit domeniul de calcul mărginit este discretizat de o triangulație, iar soluția este căutată sub forma unor polinoame de variabilele spațiale, definite pe fiecare celulă a triangulației, necunoscutele problemei numerice fiind referitoare la nodurile, laturile sau fețele triangulației.

Ultima condiție face ca matricea $\mathbf{A}$ a sistemului liniar să fie una rară. În metoda Galerkin aplicată ecuațiilor eliptice, această matrice este simetrică și pozitiv definită.

Spunem că o triangulație $\mathcal{T}_h = (K_i)$, $i \in I$ este regulată (conformă), dacă îndeplinește următoarele trei condiții:

- elementele nu se suprapun $\text{Int}(K_i) \cap \text{Int}(K_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$;
- elementele acoperă domeniul de calcul $\bigcup_{i \in I} K_i = \bar{\Omega}$;
- nu sunt permise noduri agățate pe laturi, adică intersecția a două elemente $K_i \cap K_j$, pentru $i \neq j$ este fie în nod, o latură sau față care aparține ambelor elemente.

Se vor folosi următoarele notații:

- $\mathcal{V}$ - mulțimea celulelor V_i , în particular V_K - interiorul elementului K ;
- $\mathcal{F}$ - mulțimea fețelor F_i , în particular F_K - fețele elementului K ;
- $\mathcal{E}$ - mulțimea laturilor E_i , în particular E_K - laturile elementului K .
- $\mathcal{N}$ - mulțimea nodurilor N_i , în particular N_K - nodurile elementului K .

Acest preambul permite să *definim elementul finit prin tripletul* (K, P_T, Σ_T) , în care:

- $K \in \mathbb{R}^n$ este celula elementară din triangulație;
- P_T este un spațiu finit dimensional φ al funcțiilor de interpolare (de "bază" sau de "formă") definite pe K ;
- Σ_T este o mulțime de variabile, baza spațiului P'_T , dualul spațiului P_T , numite grade de libertate, soluția numerică din K fiind produsul de dualitate.

Asta înseamnă că la scară globală, soluția FEM este descrisă de tripletul: triangulația $\mathcal{T}_h$ a domeniului de calcul, mulțimea funcțiilor de formă - definită fiecare pe domeniul de calcul (dar cu suport redus la câteva celule adiacente) și vectorul dual al gradelor de libertate, cu semnificațiile lor geometrice (ele fiind asociate nodurilor, muchiilor, fețelor sau volumelor). Spunem că funcțiile de formă alcătuiesc o bază nodală, dacă gradele de libertate sunt valorile din noduri ale soluției numerice, respectiv funcțiile de bază au valorile $\varphi_j(N_i) = \delta_{ij}$, în nodurile $N_1, N_2, \dots, N_k$ ale triangulației.

3.1.2 Formularea corectă a problemei discrete

Trebuie să remarcăm că în condiții de conformitate, funcționala biliniară a moștenește caracteristicile de simetrie, marginire și coercitivitate și în subspațiul $X_h \subset X$, și în consecință conform teoremei Lax-Milgram, problema discretă este *bine formulată*, având și ea soluție, aceasta este unică și continuă față de date. Prin discretizare FEM, forma slabă a ecuației de rezolvat devine $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, cu $a(.,.)$ simetrică, marginită și coercivă. Aceasta este de fapt forma slabă a sistemului de ecuații liniare, cu matricea $\mathbf{A} : \mathbf{v}^T(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}$. În consecință, matricea $\mathbf{A}$ a sistemului generat prin discretizare FEM este simetrică și pozitiv definită (are valori proprii mai mari sau egale cu constanta c de coercitivitate), deci este inversabilă (condiția de marginire nu are relevanță în spațiul finit dimensional, deoarece este implicită) http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation. Iată cum condițiile de bună formulare a problemei continue de câmp se propagă în cazul elementelor finite conforme, până la faza finală de rezolvare a sistemului cu un număr finit de ecuații algebrice liniare. Este o proprietate

remarcabilă, care explică succesul elementelor finite conforme.

O a patra condiție pe care trebuie să o îndeplinească orice soluție numerică aproximativă, în afara de cele trei de bună formulare, este cea de *convergență*, către soluția exactă.

Două teoreme fundamentale ilustrează proprietățile de aproximare și convergență ale elementelor finite conforme. Prima este **lema lui Céa**, care arată că soluția discretă obținută prin metoda elementului finit are cea mai mică eroare de aproximare, dintre toate elementele subspațiului discret X_h . În condițiile teoremei Lax-Milgram

$$\|u - u_h\|_X \leq (C/c) \|u - v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.4)$$

în care u este soluția exactă a problemei, u_h este soluția sa numerică, C este constanta de continuitate și c este constanta de coercitivitate a funcționalei $a(.,.)$ pe X . Soluția dată de metoda elementelor finite este deci pseudo-optimală, fiind până la o constantă multiplicativă, *cea mai bună soluție* din sub-spațiul finit dimensional al soluțiilor numerice posibile. Dacă se utilizează semi-norma energetică $|\cdot|^2 = a(.,.)$, generată de produsul scalar definit de funcționala biliniară a , inegalitatea anterioară devine:

$$|u - u_h| \leq |u - v|, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5)$$

De această dată constanta C/c nu mai apare, deci soluția numerică este chiar cea mai bună soluție, în norma energetică. Fiind proiecția soluției exacte (element într-un spațiu Hilbert) pe subspațiul discret, soluția FEM are cea mai mică eroare, măsurată în norma energetică (http://en.wikipedia.org/wiki/Cea's_lemma), [120], [64]. Oricum, după cum s-a văzut în Capitolul 2.3, în cazul problemelor scalare $C = 1$, și $c = 1$, în consecință, soluția numerică este optimală și în norma Sobolev (deci din punctul de vedere al intensității câmpului, care este gradientul potențialului).

Deoarece $a(u, v) = f(v)$ și $a(u_h, v) = f(v)$, $\forall v \in V_h$, rezultă imediat că abaterea soluției numerice față de cea exactă este ortogonală pe spațiul discret al funcțiilor de test:

$$a(u - u_h, v) = 0. \quad (3.6)$$

Această relație, fundamentală pentru FEM este cunoscută sub numele de **condiția Galerkin de ortogonalitate**.

A doua teoremă se referă la **convergență**. Să presupunem acum că funcțiile de formă sunt polinoame de gradul k pe porțiuni (pe fiecare element), dar soluția este continuă pe întreg domeniul de calcul este suficient de netedă, $u_h \in H^{(k+1)}(\Omega)$. În aceste condiții, eroarea soluției numerice este [133], [64]:

$$\|u - v_h\|_{H^m} < h^{(k+1-m)} \|u\|_{H^{(k+1)}}, \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.7)$$

Netezimea soluției numerice depinde de netezimea termenului liber al problemei, a felului în care variază spațial constanta de material, de netezimea frontierei domeniului și a condiției de frontieră. Din acest motiv ne vom mulțumi pentru început să folosim elemente finite "liniare", de ordinul minim, care este ordinul întâi: $k = 1$. Relațiile de tipul (3.7) sunt cunoscute sub numele de estimatori a priori de eroare.

Trebuie să remarcăm faptul că teoremele prezentate asigură convergența globală "în medie" a soluției numerice către cea exactă pe întreg domeniul și nu o convergență locală, punctuală. Următoarea teoremă, numită a energiei erorii ilustrează în mod memorabil acest aspect: *Energia erorii este egală cu eroarea energiei.*

Pentru demonstrație se consideră seminorma energetică a abaterii soluției numerice față de cea exactă:

$$\begin{aligned} |u - u_h|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = \\ &= a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) = \\ &= |u|^2 - |u_h|^2 + 2a(u_h, u_h) - 2a(u, u_h) = |u|^2 - |u_h|^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

deoarece, datorită condiției Galerkin $a(u - u_h, u_h) = 0$, funcționala bilinară simetrică se anulează:

$$a(u, u_h) - a(u_h, u_h) = f(u_h) - f(u_h) = 0. \quad (3.9)$$

Toate aceste proprietăți remarcabile [9], [64] explică de ce FEM are o poziție privilegiată, între metodele de rezolvare numerică a problemelor de câmp electromagnetic.

3.1.3 Continuitatea soluției MEF

În figura (3.1) sunt reprezentate funcțiile de bază nodale (cu albastru) și soluția numerică (cu roșu), ce se obține prin combinația liniară a funcțiilor de bază (numite și "de formă"), și care are graficul o linie poligonală continuă. Gradele de libertate sunt valorile soluției numerice în nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$. În nodurile extreme x_0 și x_5 , soluția satisface condiții Dirichlet nule. În Fig. 3.2 este reprezentată grafic soluția unei probleme 2D cu condiții Dirichlet nule. Funcția se obține prin combinația liniară (suma ponderată) a funcțiilor de formă asociate nodurilor interne, care au graficele de formă piramidală cu înălțime unitară (Fig. 3.3). Gradele de libertate sunt chiar valoarea soluției în nodurile interne ale rețelei de triunghiuri.

Relația (3.7) demonstrează convergența soluției numerice către soluția exactă, atunci când $h \rightarrow 0$. Curba și suprafața din figurile 3.1 și 3.2 tind către graficele netede ale soluțiilor exacte. Convergența este mai rapidă, dacă se folosesc ca funcții

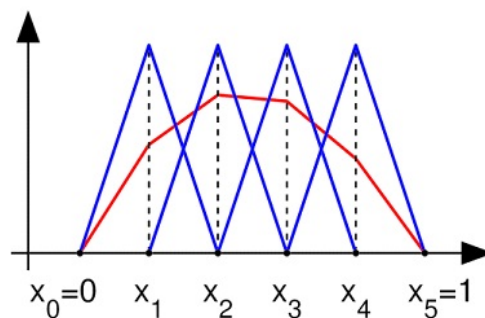


Figura 3.1: Soluția numerică în cazul 2D și funcțiile de formă ([wik/finiteelements](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method))

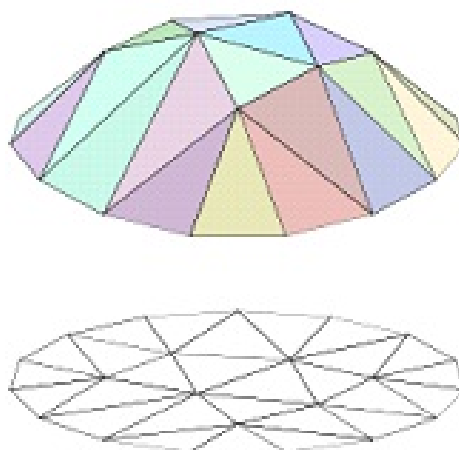


Figura 3.2: Graficul soluției numerice, liniară pe porțiuni, în cazul 2D ([wiki/finiteelements](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method))

de formă, polinoame de grad mai înalt, dar acest lucru este limitat și de netezimea intrinsecă a soluției exacte.

Trebuie să remarcăm că folosirea aproximărilor de ordinul întâi pentru potențial, face ca acesta să fie continuu pe tot domeniul de calcul, dar gradientul său (intensitatea câmpului) să fie constant(ă) pe fiecare element, deci să aibă salturi la trecerea de la un element la altul, ceea ce conduce la erori destul de mari. Acesta este motivul pentru care, în practică se folosesc deseori pentru soluții mai precise elemente finite de ordin mai înalt, cel puțin doi, chiar dacă *elementele liniare* rămân cele mai răspândite.

Trebuie remarcat faptul că soluția numerică nu satisface în sens clasic ecuația diferențială în nici un punct din domeniul de calcul, deoarece derivata sa de ordinul

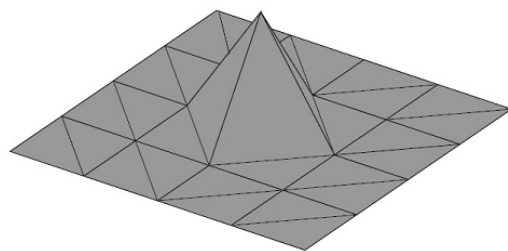


Figura 3.3: Funcția de formă MEF liniară nodală [91]

doi este nulă în interiorul elementelor, deci aproape peste tot, iar în rest soluția numerică nu este derivabilă. Cu toate acestea după cum s-a arătat, linia poligonală generată de FEM este cea mai aproape de graficul soluției exacte, dintre toate liniile poligonale de pas dat. Mai mult, abaterea față de soluția exactă poate fi făcută oricât de mică (atât global cât și local), dacă micșorăm pasul h . Acum înțelegem de ce am renunțat la forma clasică a ecuațiilor diferențiale, care avea un caracter local și am preferat forma slabă a problemei, care are un caracter global. Doar așa am putut găsi o soluție simplă - liniară pe porțiuni și precisă - pe cât posibil de aproape de cea exactă.

Abordarea prezentată este cea mai des utilizată în MEF, dar nu este singura. O variantă este cea numită *Galerkin discontinuă* - (*DG FEM* - "*discontinuous Galerkin Finite Element Method*"), în care funcțiile de formă nu sunt continue, la trecerea de la un element la altul (elementele finite sunt neconforme, și pot avea noduri agățate). Chiar dacă are mai multe grade de libertate, deci necesită un efort de calcul mai mare, metoda DG are o serie de avantaje, în primul rând flexibilitatea ei sporită, [107]. În Tabelul 3.1 se prezintă caracteristicile acestei abordări în comparație cu alte metode numerice: diferențe finite (FDM), volume finite (FVM) și elemente finite (FEM). DG-FEM combină flexibilitatea FEM de ordin înalt cu comportarea locală conservativă a FVM, fiind potrivită mai ales pentru rezolvarea problemelor neeliptice (noncoercitive).

	Geometrii complexe	Acuratețe de ordin superior și adaptivitate $h - p$	Forma semi-discretă explicită	Conservare	Probleme eliptice
FDM	×	✓	✓	✓	✓
FVM	✓	×	✓	✓	(✓)
FEM	✓	✓	×	(✓)	✓
DG-FEM	✓	✓	✓	✓	(✓)

Tabela 3.1: Caracteristicile metodelor numerice pentru analiza câmpului [58]

3.1.4 Cazul domeniilor nemarginite

O problemă dificilă cu care se confruntă metoda elementului finit este modelarea domeniilor nemărginite, a spațiului fizic infinit extins. Soluția este să se introducă o frontieră fictivă, numită "*frontiera deschisă*", de forma geometrică simplă: sferă, cilindru, cub, cerc sau pătrat, și care divizează domeniul spațial într-o parte interioară, marginită și una exterioară. Se rezolvă apoi problema interioară, pentru care se impun condiții speciale de frontieră. În aplicații, cel mai des se întâlnesc următoarele abordări:

- Spațiul exterior omogen poate fi modelat numeric, în mod natural prin metoda elementelor de frontieră (BEM = Boundary Element Method). Aceasta stabilește o relație matricială între valorile discretizate ale potențialului de pe suprafață (condiția Dirichlet) și derivata sa după normală (condiția Neumann), relație care este forma discretă a operatorului Poincare-Steklov (http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare-Steklov_operator). Dacă ulterior se rezolvă cu MEF problema interioară cu această condiție de frontieră, am modelat de fapt cele două domenii cuplate, folosind combinația *FEM-BEM* [65], [38], [121], [37].
- Se folosește pe frontiera deschisă o condiție aproximativă, de tip *Robin*, în care se impune valoarea combinației liniare dintre potențial și derivata sa după normala [70], (http://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition). Rezultate bune se obțin considerând ca soluție numerică media dintre soluțiile celor două probleme duale: cu condiții Dirichlet nule și cu condiții Neumann nule.
- Se adaugă în exteriorul frontierei un *strat fictiv* de grosime finită, în care materialele au proprietăți absorbante sau elementele finite au funcții de bază care modelează spațiul infinit, numite "*elemente finite infinite*" [4].

Dupa cum se va vedea ulterior, în cazul regimurilor evolutive se folosesc și alte tehnici de tratare a frontierelor deschise, numite în acele cazuri și frontiere absorbante.

3.2 Probleme cu potentialul scalar in medii liniare

3.2.1 Asamblarea matricei si a termenului liber

Un aspect cheie al concepției eficiente a codurilor de analiza cu element finit îl reprezintă folosirea *elementului de referință* și transformarea ulterioară a acestuia

în elementele fizice, care alcătuiesc triangulația domeniului de calcul (Fig. 3.4).
Elementul de referință $\hat{K}$ de forma geometrică simplă: 1D - segment de dreaptă,

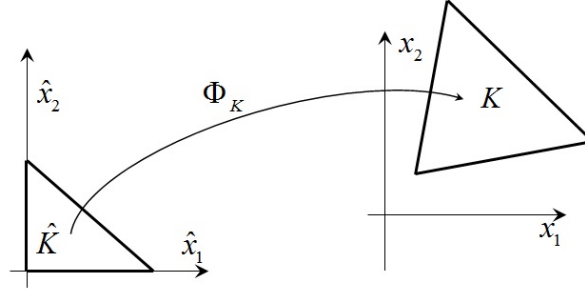


Figura 3.4: Transformarea elementului de referință în elementele fizice

2D - triunghi sau pătrat, 3D: tetraedru, prismă sau cub este transformat într-un element fizic K , folosind transformarea bijectivă, continuă și derivabilă (conformă):

$$\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad (3.10)$$

care leagă coordonatele elementului fizic, $x = \Phi_K(\hat{x})$ de cele ale elementului de referință $\hat{x}$. Matricea jacobian $\mathbf{F}_K(\hat{x})$ a transformării Φ_K (conformă) are determinantul $J_K = \det(\mathbf{F}_K)$ nenul. Aceste transformări pot fi folosite în cazul unor sisteme de coordonate ortogonale necarteziene, dar în continuare ne vom limita la cazul cel mai simplu în care Φ_K este o *transformare afină*:

$$\Phi_K(\hat{x}) = \mathbf{B}_K \hat{x} + \mathbf{b}_K, \mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^d, \quad (3.11)$$

deci elementele fizice au aceeași formă ca cel de referință, și se obțin doar prin translația, rotația sau scalarea elementului de referință. În acest caz, $\mathbf{F}_K = \mathbf{B}_K$ și $J_K = \det(\mathbf{B}_K)$ este constant pe K . Avantajul acestei alegeri este că transformă polinoamele din elementul de referință în polinoame de același grad definite pe elementul fizic, ceea ce simplifică foarte mult analiza cu element finit.

Norma matricei jacobian $h(x) = \|\mathbf{F}_K\|$ descrie mărimea locală a elementului fizic din rețeaua de discretizare, iar norma rețelei este definită ca $h = \sup h(x)$. Dacă toate elementele au aceeași valoare a parametrului h , *rețeaua este uniformă*, iar dacă valorile acestui parametru sunt aproximativ egale, numim triangulația *quasi-uniformă*. Dacă $h(x)$ este marginit inferior și superior, atunci avem o triangulație *nede generată*. În continuare vom presupune că transformările tuturor elementelor fizice sunt bine condiționate, adică *numărul de condiționare* $\|\mathbf{F}_K\| \|\mathbf{F}_K^{-1}\|$ este marginit (de preferință ar trebui să aibă valoare cât mai aproape de unitate), triangulația care respectă această condiție numindu-se *regulată*.

Cea mai simplă formă a elementului de referință este cea *simplicială*, adică triunghi pentru $d = 2$ și tetraedru, pentru $d = 3$. În acest caz, de mare utilitate practică se dovedește folosirea *coordonatelor baricentrice* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, (\lambda_4)$ în locul celor carteziane: $\hat{x}_1, \hat{x}_2 (\hat{x}_3)$. Fiecare coordonată barimetrică este asociată unui vârf al elementului de referință, și în consecință ele sunt în număr de $d + 1$, cu una în plus față de cele carteziane, adică trei coordonate în 2D și patru coordonate în 3D, care evident nu sunt independente. După cum se va vedea, suma lor este unitară în orice punct. Ele se definesc foarte simplu, ca fiind polinoame de grad unu, care se anulează în toate vârfurile, cu excepția celui caracteristic, în care coordonata baricentrică are valoarea unu:

$$\lambda_i \in P^1(K) \text{ a.î. } \lambda_i(V_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq j \leq d + 1. \quad (3.12)$$

În cazul 2D (elementul de referință este triunghiul dreptunghic): $d = 2$,

$$\hat{K} \in \mathbb{R}^d, \hat{K} = \{\hat{x} \mid 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, x^1 + x^2 \leq 1\} \quad (3.13)$$

$$\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2, \lambda_2 = x^1, \lambda_3 = x^2. \quad (3.14)$$

În cazul 3D (elementul de referință este tetraedrul): $d = 3, \hat{K} \in R^d$,

$$\hat{K} = \{\hat{x} \mid 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, 0 \leq x^3 \leq 1, x^1 + x^2 + x^3 \leq 1\} \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2 - x^3, \lambda_2 = x^1, \lambda_3 = x^2, \lambda_4 = x^3. \quad (3.16)$$

În literatură se întâlnesc și alte notații pentru coordonatele baricentrice, de exemplu L_i , sau φ_i . Remarcăm că aceste coordonate sunt numere reale cuprinse între 0 și 1, iar în 2D/3D, pentru un punct interior elementului triunghiular/tetraedru, ele sunt egale cu măsura (arie/volum) a triunghiului/teraedrului obținut din element prin înlocuirea nodului caracteristic cu punctul curent, raportată la măsura elementului. Asta explică de ce suma celor $d + 1$ coordonate barimetricale ale elementului K este egală cu 1, relație care permite determinarea valorii oricărei coordonate baricentrice folosind celelalte variabile.

Cea mai simplă alegere pentru elementele finite este cea în care *funcțiile de formă (de bază) sunt chiar coordonatele baricentrice* asociate vârfurilor din interiorul triangulației. Acestea sunt funcții continue pe toată triangulația și au suportul nenul doar pe elementele care au nodul caracteristic, nod comun. Această alegere, cu funcții de ordinul întâi, numită și "liniară" este potrivită pentru rezolvarea ecuației Poisson cu condiții Dirichlet nule, satisfăcută de potențialul electrostatic scalar. Gradele de libertate sunt valorile nodale ale potențialelor din vârfurile interioare ale triangulației. Soluția numerică va fi o funcție continuă pe tot domeniul

de calcul cu variație liniară pe laturi, determinată de valorile din noduri. Principala dezavantaj constă în faptul că derivata după normala a potențialului nu va avea trecere continuă, de la un triunghi la altul, deoarece câmpul este constant în fiecare triunghi. Această dificultate se va remedia ulterior, când vom folosi elemente finite de ordin superior.

Partea centrală a algoritmului metodei elementului finit constă în **asamblarea matricei sistemului A** și a vectorului termenilor liberi **f**, numite din considerente istorice cu termenii mecanici: *matrice de rigiditate și vector de sarcină*. Pentru aceasta se parcurg elementele triangulației $\mathcal{T}_h$ și se adaugă contribuția fiecărui element K la cele două matrice. În final se obține:

$$\mathbf{A} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{A}^K \mathbf{C}^K, \quad \mathbf{f} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{f}^K, \quad (3.17)$$

în care matricea $\mathbf{C}^K$ este o matrice topologică, de conectivitate, care descrie relația dintre gradele locale de libertate și cele globale (matrice rară cu elemente egale cu 1, în cele trei poziții în care gradul local corespunde cu gradul global de libertate, și 0 în rest). În consecință și matricea $\mathbf{A}$ este rară.

Dacă se rezolvă de exemplu, problema variațională prin care se caută $u \in X_h \subset H_D^1(\Omega)$ a.i.

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} k u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (\forall) v \in X_h, \quad (3.18)$$

aceasta corespunde ecuației Helmholtz, care degenerază în ecuația Poisson, în cazul particular $k = 0$. În consecință, discuția se referă la aspectele algoritmice ale rezolvării problemelor statice și staționare ES, MS, EC, dar și problemelor descrise de ecuațiile Helmholtz complexe din regimul EQS.

Contribuțiile elementului K la matricele sistemului sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^K &= \varepsilon^K \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \int_K k \varphi_i \varphi_j dx = \\ &= \varepsilon^{\hat{K}} \int_{\hat{K}} (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} + \int_{\hat{K}} k \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} \\ \mathbf{f}_i^K &= \int_K \mathbf{f} \varphi_i dx = \int_{\hat{K}} \mathbf{f} \hat{\varphi}_i \mathbf{J} d\hat{x} \end{aligned} \quad (3.19)$$

în care $\hat{\varphi}$ sunt funcțiile de forma ale elementului de referință. Tot din considerente de similitudine mecanică, cei doi termeni ai matricei $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{M}$ se mai numesc *matrice de rigiditate* (integralele produsului scalar de gradienti multiplicat cu $\varepsilon - \mathbf{S}$) și respectiv *matrice de masă* (integralele produsului scalar de funcții de forma multiplicat cu $k - \mathbf{M}$).

De exemplu, în cazul elementelor finite 2D de ordinul întâi, la care funcția de forma este $\varphi_j = a_j x + b_j y + c_j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ij}^K &= \varepsilon^K (a_i a_j + b_i b_j) \mathbf{A} + k^K \mathbf{A}_K / 12; \\ \mathbf{f}_i^K &= \mathbf{f}^K \mathbf{A}^K / 3,\end{aligned}\tag{3.20}$$

cu $a_i = (y_j - y_k) / (2A)$; $b_j = -(x_j - x_k) / (2A)$; în care (x_i, y_i) , (x_j, y_j) și (x_k, y_k) sunt coordonatele varfurilor elementului K iar

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$$

este aria sa. Relațiile rezultă fără dificultate din definiția coordonatelor baricentrice $\lambda_i = \varphi_i(x, y)$.

Aici s-a folosit formula Holland-Bell [91]:

$$\int K \lambda_i^m \lambda_j^n \lambda_k^p dx = 2A_K mnp / (m + n + p + 2).\tag{3.21}$$

Transformarea afină în cazul 2D duce varfurile triunghiului de referință $\hat{x}^1 = [0, 0]'$; $\hat{x}^2 = [1, 0]'$; $\hat{x}^3 = [0, 1]'$ în vârfurile triunghiului fizic K cu coordonatele $x_1 = [x_1, y_1]'$; $x_2 = [x_2, y_2]'$; $x_3 = [x_3, y_3]'$. În consecință, matricea transformării

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = x \Rightarrow \\& \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B_{11} + b_1 \\ B_{21} + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B_{12} + b_1 \\ B_{22} + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}; \Rightarrow \\& \Rightarrow \mathbf{F}_K = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \text{ și jacobianul ei}\end{aligned}\tag{3.22}$$

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

se exprimă în funcție de proiecțiile laturilor triunghiului fizic. Rezultele obținute pe această cale sunt aceleași cu cele determinate anterior, fără folosirea triunghiului de referință.

În cazul unor rețele de triunghiuri cu structura uniformă, care au la fiecare nod cel mult șase triunghiuri concurente (așa cum se întâmplă în Fig. 3.2 și Fig. 3.3), matricea $\mathbf{A}$ are cel mult șase elemente nenule pe fiecare linie, deci necesarul de memorie pentru a reține matricea de rigiditate și cei doi vectori, soluție (care conține gradele de libertate ale problemei) și de sarcina este de $8N$, în care N este numărul de grade de libertate, egal cu numărul nodurilor interioare din rețeaua de triunghiuri.

3.2.2 De la teorie la cod

În continuare, se exemplifică procedura descrisă anterior printr-un cod minimal de element finit scris în limbajul MATLAB, dedicat determinării numerice a soluției ecuației Laplace cu condiții de tip Dirichlet nenule pe o parte a frontierei și Neumann nule în rest, într-un domeniu bidimensional de forma arbitrară discretizat în triunghiuri.

```

1  infile % Datele problemei: citeste din scriptul .m:
2  % na,nb,nc(1:ne) — indicii nodurilor triunghiurilor i: ne
3  % x,y,z(1:nn) — coordonatele nodurilor n = 1:nn
4  % nf,vf(1:nf) — indicele nodului de frontiera n = 1:nf, cu conditie
5  % Dirichlet si valoarea conditiei
6  A = zeros(nnod,nnod); % matricea sistemului si
7  b = zeros(nnod); v = b; % termenul liber si solutia
8  for i = 1:ne % parcurge elementele si aduna contributia lor la matricea A
9      n1 = na(i); n2 = nb(i); n3 = nc(i); % nodurile
10     x1=x(n1); x2=x(n2); x3=x(n3); y1=y(n1); y2=y(n2); y3=y(n3); cordonatele
11     S = (x2*y3-x3*y2-x1*y3+x3*y1+x1*y2-x2*y1)/2 % si aria elementului curent
12     c1=y2-y3; c2=y3-y1; c3=y1-y2; d1=x3-x2; d2=x1-x3; d3=x2-x1;% proiectii
13     % contributiile (3x3) la matricea A ale elementului curent:
14     c11=(c1*c1+d1*d1)/(4*S); c12=(c1*c2+d1*d2)/(4*S); c13=(c1*c3+d1*d3)/(4*S);
15     c21=(c2*c1+d2*d1)/(4*S); c22=(c2*c2+d2*d2)/(4*S); c23=(c2*c3+d2*d3)/(4*S);
16     c31=(c3*c1+d3*d1)/(4*S); c32=(c3*c2+d3*d2)/(4*S); c33=(c3*c3+d3*d3)/(4*S);
17     A(n1,n1)=A(n1,n1)+c11; A(n1,n2)=A(n1,n2)+c12; A(n1,n3)=A(n1,n3)+c13;
18     A(n2,n1)=A(n2,n1)+c21; A(n2,n2)=A(n2,n2)+c22; A(n2,n3)=A(n2,n3)+c23;
19     A(n3,n1)=A(n3,n1)+c31; A(n3,n2)=A(n3,n2)+c32; A(n3,n3)=A(n3,n3)+c33;
20 end
21 for i=1:nf % parcurge nodurile de pe frontiera cu cond. Dirichlet
22     n=nf; v(n)=vf(i); b(n)=v(n); %n nod pe frontiera, vf valoare cond. Dirichlet
23     for j = 1:nnod % inlocuieste ecuatia nodului n cu: Vn = val_cond_fr.
24         a(n,j)=0;
25         if (j~=n & a(j,n) ~=0) b(j)=b(j)-a(j,n)v(n); a(j,n)=0; end
26     end
27     a(n,n) = 1;
28 end
29 v=A\b; % solutia problemei: potentialele in nodurile retelei

```

Procedura prezentată se poate generaliza relativ ușor în cazul tridimensional, dar și în cazul condițiilor de frontieră nenule. Condițiile Dirichlet nenule sunt condiții esențiale, deci trebuie satisfăcute apriori de soluție. Ecuațiile acestor noduri se scriu sub forma $V_j = \text{cunoscut}$, dar acesată formă duce la pierderea simetriei matricei de rigiditate. Putem salva această simetrie, dacă observăm că nodurile vecine cu nodurile de pe frontiera care au condiție Dirichlet nenula $V = V_j$ pot avea ecuații cu un termen liber suplimentar de forma

$$f_k = - \sum_{j \in \Gamma_D} A_{kj} V_j. \quad (3.23)$$

Condițiile Neumann sunt condiții naturale, în consecință, gradele de libertate vor conține și potențialele acestor noduri de pe frontiera, iar latura l care uneste nodul

i cu j va contribui la termenul liber al nodului i cu

$$\varphi^l = - \int_i^j g \varphi_i ds = -g \frac{h}{2}, \quad (3.24)$$

în care g este valoarea condiției de frontieră, iar h este lungimea laturii l . Chiar în condiții nule ($g = 0$), gradele de libertate conțin și potențialele nodurilor de pe partea de frontieră cu condiții Neumann.

Alte coduri simple de element finit pot fi găsite în

- [55] - Program MATLAB cu elemente finite triunghiulare de ordinul întâi, pentru ecuația Helmholtz scalară. Primește la intrare descrierea rețelei și generează în 30 de instrucțiuni matricea sistemului FEM.
- [83] Cod cu 83 linii MATLAB pentru rezolvarea cu FEM liniar a ecuației Poisson 2D cu condiții Dirichlet.
- [28] - Funcții MATLAB pentru programe de element finit cu aplicații mecanice, exemplificate prin două probleme una statică de elasticitate liniară și alta de frecvențe proprii. Lucrarea descrie modul eficient și flexibil de asamblare a matricei elementelor finite în MATLAB, folosind integrarea numerică a elementelor finite Lagrange de grad ridicat și jacobianul transformării conforme. Partea de procesare conține aproximativ 100 instrucțiuni MATLAB.
- [2] - program de numai 50 linii MATLAB care implementează $P_1 - Q_1$ MEF pentru rețele nestructurate de triunghiuri și patrulatere, pentru rezolvarea problemelor de ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic și condiții mixte de frontieră. Ca și celelate programe de acest tip primește la intrare fișiere de descrierea geometriei care conțin coordonatele nodurilor, topologia elementelor (triunghiuri și patrulatere) și descrierea condițiilor de frontieră (Neumann și Dirichlet). Se explică simplu și clar pasul de la teorie la implementare. Pornind de la instrucțiunile de bază sunt realizate patru programe FEM, fiecare cu mai puțin de 50 linii, pentru rezolvarea: ecuației Laplace 2D, ecuația difuziei căldurii în 2D, a unei ecuații neliniare (Ginzburg-Landau), și a ecuației Laplace 3D. Sursele sunt disponibile la (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem_50/fem_50.html)
- [111] este o pagină din blogul intitulat "Loren on the art of MATLAB", în care autoarea descrie cum pot fi asamblate rapid matricele FEM rare (timpul scade de la 200s la 1s!).

- [43] Programul prezentat este compact și foarte bine explicat . El are 30 linii MATAB și rezolvă cu MEF liniare (P_1) a ecuației Poisson 2D cu condiții de frontieră mixte Dirichlet-Neumann. Este prezentată apoi o versiune cu matrice rare, "vectorizată", mult mai eficientă, care are doar 5 instrucțiuni în plus. În continuare este prezentat un algoritm de elemente finite cu rețea 2D auto-adaptivă, obținută prin rafinarea și rarefierea locală rețelei inițiale, pe baza unui indicator de eroare. Exemplul numeric indică performanțele codului dezvoltat, care rezolvă probleme cu până la 2,8 milioane de elemente în 17 secunde. Din acest timp, jumătate este consumat de rezolvarea directă a sistemului cu $\backslash$, 20% pentru asamblarea matricei, iar restul pentru rafinarea adaptivă. Timpul de calcul depinde aproximativ liniar de numărul de elemente, iar rata de convergență a normei energetice a erorii este de $1/2$ pentru algoritmul adaptiv și $1/3$ pentru rafinarea uniformă.
- [25] descrie programul iFEM, de elemente finite adaptive, implementat în MATLAB, folosind intensiv matrice rare (nou stil de programare, numit de autor *matricializare rară*). Lucrarea descrie acest stil. Sunt folosite numai rețele de elemente finite simpliciale (triunghiuri și tetraedre), nodală liniare. Algoritmul adaptiv AFEM are etapele: rezolvă $\rightarrow$ estimează $\rightarrow$ marchează $\rightarrow$ rafinează/rărește. Rezolvarea se face direct cu $\backslash$, dar pentru sisteme mari, autorul recomandă solvele iterative bazate pe CG, cu precondiționare multigrid, care sunt mai eficiente. Estimarea se face calculând în fiecare element un indicator rezidual, bazat pe normele sursei și a saltului gradientului pe fețele elementului. După valoarea mare/mică a indicatorului, sunt marcate elementele pentru rafinare/rarefiere. Rafinarea se realizează prin disecție iar rădirea prin reunire. Programul iFEM calculează până la 10^5 necunoscute în câteva secunde, cu o rată de convergență unitară în 2D și de $2/3$ în 3D (pe jumătate pentru derivată). (<http://ifem.wordpress.com/>), (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem_50/fem_50.html.)

Funcții pentru vizualizarea soluției sunt disponibile la [32]. În Matlab nu este prea simplu să se vizualizeze rețelele nestructurate. Pachetul oferă o serie de rutine dedicate acestui scop. Acestea au ca intrare descrierea geometriei și a soluției, iar ca rezultate, diferite tipuri de vizualizări:

- soluția cu elemente colorate;
- soluția cu umbre interpolate;
- rețeaua de discretizare;

3.3 Probleme cu potențialul vector (*rot-rot*). Elemente de muchie

Modul în care s-a aplicat metoda elementului finit, prezentat în paragraful anterior este portiv pentru rezolvarea problemelor staționare cu potențial scalar, cum sunt cele întâlnite în regimurile ES, MS, EC și EQS, dar nu este potrivit pentru regimurile în care trebuie folosit potențialul vector, cum sunt regimurile MG, MQS sau ED. După cum s-a văzut, în aceste regimuri trebuie rezolvate ecuații, care au forma slabă, în care se caută $u \in X_h \subset H(\text{rot}, \Omega)$ a.i.

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot } u \text{rot } v dx + \int_{\Omega} k u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (\forall) v \in X_h. \quad (3.25)$$

Explicația principală constă în faptul că de astă dată, soluția trebuie căutată într-un subspațiu *rot-conform*. Încercarea de a rezolva astfel de probleme folosind funcții de forma nodale, pentru fiecare componentă a soluției duce la erori numerice importante, mai ales în jurul singularităților câmpului, care apar pe suprafețele de separație (cu muchii și vârfuri), între subdomeniile cu caracteristici magnetice diferite. S-a constatat și faptul că în calculul frecvențelor proprii de rezonanță ale cavităților rezonante, atunci când se folosesc elemente finite nodale, apar moduri

de rezonanță false, numite "*spurious modes*", fenomen numit de "*poluare spectrală*", care dispare atunci când soluția este căutată într-un spațiu *rot-conform*. Explicația este aceea că în $H^1(\Omega)$ nucleul operatorului *rot rot* nu este bine reprezentat [14], [126]. O analiză a acestui fenomen este făcută în [95].

Soluția este să se folosească elemente finite cu funcții de forma potrivite pentru problema vectorială, cu operator diferențial de tip *rot - rot* ce va fi rezolvată. Acestea sunt *funcțiile de forma vectoriale, numite și elemente de muchie*. [18], [78], [12], [80], [72]. O analiză critică privind elementele de muchie este făcută în [93], [94].

În 2D și respectiv 3D, un câmp vectorial se reprezintă prin două sau trei câmpului scalare cuplate, componente ale câmpului vectorial:

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y \quad (3.26)$$

și respectiv

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y + T_z \mathbf{e}_z, \quad (3.27)$$

în care $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sunt versorii sistemului cartezian de coordonate. În principu, fiecare componeta T_x, T_y, T_z ar putea fi reprezentată prin combinații de funcții de formă nodale, dar această abordare este cea care se dorește a fi evitată. O alternativă este data de expresia:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^k \mathbf{W}_i T_i, \quad (3.28)$$

în care T_i este integrala câmpului vectorial $\mathbf{T}$ de-a lungul laturii l_i din triangulația considerată. În consecință, funcțiile de forma vectoriale $\mathbf{W}_i$ sunt definite de relațiile:

$$\int_{l_j} \mathbf{W}_i ds = \delta_{ij}, \quad (3.29)$$

adică funcția de formă vectorială $\mathbf{W}_i$ este orientată tangențial de-a lungul laturii i și este orientată normal de-a lungul celorlalte laturi ale elementului K . Mai mult, funcția de formă vectorială $\mathbf{W}_i$ are în 3D componenta tangențială nulă pe orice față care nu conține muchia i . În literatură se întâlnesc și alte notații pentru funcțiile de bază vectoriale, de exemplu $\mathbf{N}_i$.

Restricțiunile constatate fac ca în 2D, două triunghiuri cu latura comună să aibă la trecerea prin această latură aceeași componentă tangențială a funcțiilor de formă, dar nu și aceeași componentă normală. În 3D, funcțiile de formă vectorială își conservă componenta tangențială la trecerea de la un tetraedru la altul, prin fața lor

comună. În consecință, componenta tangențială a funcțiilor de formă vectoriale (de muchie) este continuă, în tot domeniu de calcul, motiv pentru care ele se mai numesc și *funcții de formă vectoriale cu tangenta continuă*. Aceasta rot-conformitate le face potrivite pentru a reprezenta intensitatea câmpului electric sau magnetic, dar și potențialul magnetic vector.

Funcțiile vectoriale care au următoarele expresii în coordonate baricentrice:

$$\mathbf{w}_{ij} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i, \quad (3.30)$$

valabile atât în 2D, când $i, j = 1, 2, 3$ cât și în 3D, când $i, j = 1, 2, 3, 4$, iar ij este latura ce leagă nodurile i cu j satisfac aceste condiții.

Aceste funcții, numite *elemente Whitney* [18], [133], [78] sunt potrivite pentru a fi alese funcții de forma pentru potențialul magnetic vector (Fig. 3.5), deoarece ele au componeta tangențială constantă de valoare $1/l_{ij}$ pe latura ij și nulă pe celelalte laturi, divergența nulă pe întreg elementul K , și rotor constant pe acel element: $\text{rot} \mathbf{w}_{ij} = 2 \nabla \lambda_i \times \nabla \lambda_j$. Gradele de libertate asociate acestor funcții sunt valorile integralelor pe muchiile lor caracteristice.

Lucrurile stau similar cu reprezentarea potențialului electric scalar prin elemente nodale de ordinul întâi, unde soluția numerică trece continuu de la un element la altul, are gradientul (intensitatea câmpului electric) constant pe fiecare element, deci cu divergența și rotor nule pe element. Rotorul superficial este și el nul pe fețele elementelor, deoarece componeta tangențială a intensității câmpului se conservă la trecerea de la un element la altul, datorită continuității potențialului scalar. Singura "imperfecțiune" se referă la divergența superficială pe fețele elementelor, care este nenulă, deoarece componeta normală a câmpului are un salt pe aceste fețe. Putem spune că, în acest caz, sursa de câmp este distribuită exclusiv pe fețele elementelor finite și este divergența intensității (implicit a inducției) câmpului electric.

În cazul elementelor de muchie de ordinul întâi, potențialul magnetic vector are componeta tangențială continuă la trecerea între elemente, iar rotorul sau (inducția magnetică) este constant în interiorul elementului, deci cu divergența și rotorul nule, chiar dacă la trecerea între elemente rotorul superficial este nenul (în schimb divergența superficială este implicit nulă, fiind un câmp solenoidal ca orice rotor). Mai mult, soluția numerică - potențialul vector are divergența nulă atât în interiorul elementului cât și superficial, deoarece componeta normală a potențialului se conservă la trecerea de la un element la altul fiind nulă. Rotorul superficial al potențialului vector este și el nul, deoarece componeta tangențială a acestui potențial se conservă la trecerea de la un element la altul. În acest caz sursa de câmp este distribuită atât în interiorul elementelor cât și pe fețele lor, fiind rotorul potențialului magnetic și respectiv al inducției magnetice (și implicit al intensității câmpului magnetic).

În concluzie, în cazul soluției FEM a problemei de ES cu elemente nodale, densitatea de sarcină este distribuită superficial pe fețele elementelor, iar în problema MG rezolvată cu elemente de muchie, curentul electric este distribuit pe fețele elementelor. Câmpul generat de elementele nodale este irotațional iar cel generat de elementele de muchie este solenoidal. În ambele cazuri, câmpul electric, respectiv magnetic este constant în fiecare element iar sursa sa este superficială, pe fețele elementelor. Prin discretizare în FEM se rezolvă deci o altă problemă, ușor diferită de cea originală, dar care tinde către aceasta, pe măsură ce rețeaua de discretizare se rafinează. Aceasta explicație combinată cu teorema Helmholtz, de descompunere a câmpurilor arată cele două fețe complementare ale FEM: elementele nodale și cele de muchie. Doar prin ambele abordări combinate se obține o reprezentare corectă și completă a câmpului electromagnetic, și în gneral a câmpurilor fizice. FEM nu poate fi înțeleasă complet, fără înțelegerea ambelor tehnici, nodală și de muchie. Numai împreună se obțin rezultate corecte, nu numai din punct de vedere matematic ci și algoritmic dar și fizic.

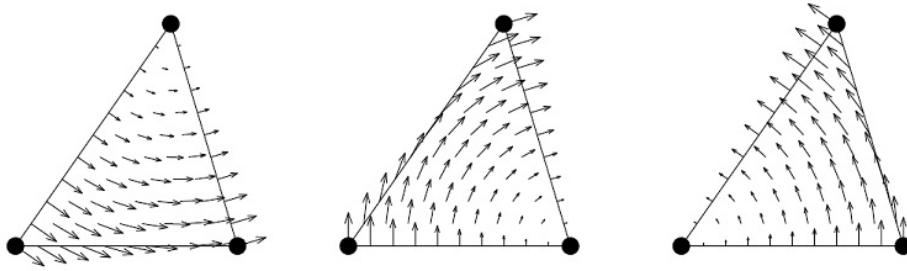


Figura 3.5: Funcțiile de formă vectoriale (de muchie) în 2D: w23, w13, w12 [14]

În [133], (<http://www.math.chalmers.se/~stig/underv/doktorandkurs/FEM/200607/nedelec.pdf>) sunt prezentate și alte elemente de muchie, cunoscut sub numele de elemente Nédélec: de ordin zero și de prima speță, definite în 3D de $N_0^I = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ cu dimensiune 6; sau de ordin unu și de a doua speță, definite de $N_1^{II} = (P^1(K))^d$ de dimensiune 12 pentru $d = 3$, cu proprietatea $rot N_0^I(K) = rot N_1^{II}(K)$. În cazul 2D $N_0^I = \{ \mathbf{a} + b[y, -x]' | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \}$ are dimensiunea 3. Se demonstrează că funcțiile vectoriale de formă

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{N_0} &= \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \\ \widehat{\varphi}_E &= \nabla (\lambda_i \lambda_j) \end{aligned} \quad (3.31)$$

alcătuiesc o bază a elementelor de muchie de tip Nédélec de ordinul întâi: $N_1^{II}(K)$. Deoarece aparțin spațiului $H(rot, \Omega)$, elementele de muchie, sunt potrivite pentru a reprezenta potențialul magnetic vector, dar și intensitatea câmpurilor. Pentru reprezentarea inducțiilor electrice și magnetice ar trebui folosite alte feluri de

elemente finite, care aparțin spațiului $H(div, \Omega)$. În [133] se introduc astfel de elemente de ordin redus astfel: $RT0(K) = \{\mathbf{a} + b\mathbf{x} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, b \in \mathbb{R}\}$ cu dimensiune 4 - elemente *Raviart-Thomas*, care au gradele de libertate fluxurile pe fețele elementelor, motiv pentru care se numesc *elemente de față*;

$BDM_k = (P^k(K))^d$ - elemente *Brezzi-Douglas-Marini*, cu proprietatea $div RT0(K) = div BDM1 = P^0(K)$, adică au divergența constantă pe element.

Prin discretizarea spațiilor din diagrama de Rham, folosind elemente finite convenabil alese se obține o nouă diagramă, care la randul ei este o secvență exactă [133]: Acestea sunt spațiile liniare finit dimensionale, generate de funcțiile de

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(rot, \Omega) & \xrightarrow{rot} & H(div, \Omega) & \xrightarrow{div} & L_2(\Omega) & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & W_h & \xrightarrow{\nabla} & V_h & \xrightarrow{rot} & Q_h & \xrightarrow{div} & S_h & \xrightarrow{0} & \{0\} \end{array}$$

bază ale elementelor nodale, de muchie, de față și respectiv de volum.

Pentru elementul de referință $\hat{K}$, secvența de dimensiune minimă conține: elementul nodal, de muchie, de față, de volumul:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(\hat{K}) \xrightarrow{rot} \mathcal{RT}_0 \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \quad (3.32)$$

asa cum sunt ele reprezentate în Fig. 3.9 unde sunt marcate colorat și gradele de libertate.

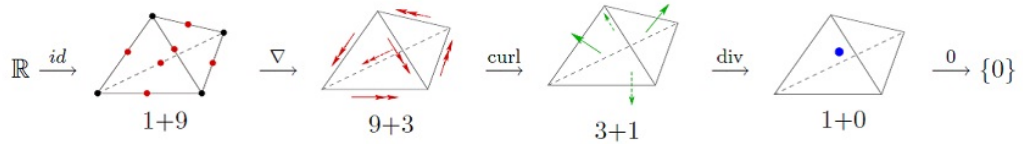


Figura 3.6: Secvența de Rham pentru elementele finite 3D de dimensiune minimă [133]

Imaginea (codomeniul) fiecărui operator de derivare spațială și nucleul operatorului următor (spațiul în care acesta se anulează) din diagrama au dimensiuni egale. În Fig. 3.9 sunt indicate dimensiunile nucleului și imaginii: $dim Xh = dim(ker(D)) + dim(range(D))$, pentru fiecare operator $D = grad, rot, div$. Situația se menține și în cazul 2D, în care se întâlnesc două variante (corespunzătoare câmpului magnetic sau electric axial și respectiv transversal): cu elemente de muchie - Nédélec:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^0 \xrightarrow{0} \{0\} \quad (3.33)$$

sau cu elemente de fata - Raviart-Thomas:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{rot} \mathcal{RT}_0(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.34)$$

Ele sunt reprezentate grafic în Fig. 3.7, unde sunt puse în evidență în culori și gradele de libertate (nodale cu negru, de muchie/față cu roșu și de volum cu albastru), numărul lor, dar și separația dimensiune nucleu/imagine.

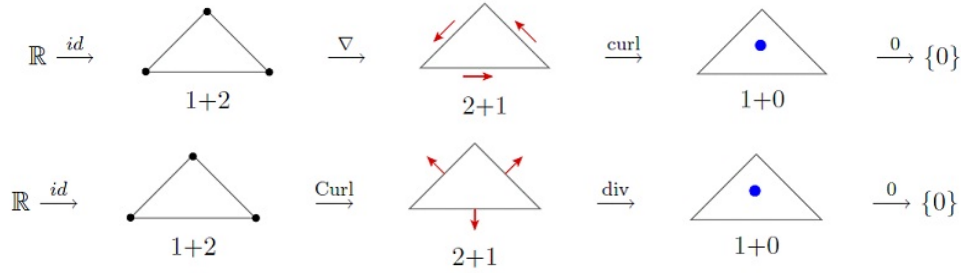


Figura 3.7: Secvența exactă de elemente finite de ordin minim în 2D: Nédélec și Raviart-Thomas [133]

Remarcăm faptul că în 2D, elementele div-conforme se obțin prin rotația cu 90 de grade a elementelor rot-conforme. În cazul 2D (plan paralele) se definesc doi operatori rotor: rot și pentru câmpuri transversale și respectiv orientate axial. În cazul elementelor bidimensionale de ordinul doi, secvența de Rham exactă este:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^2(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_1^{II}(\hat{K}) = P^1(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.35)$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^2(\hat{K}) \xrightarrow{rot} BDM_1^{II}(\hat{K}) = P^1(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{id} \{0\}. \quad (3.36)$$

iar gradele de libertate și numărul lor sunt reprezentate în Fig. 3.8.

În cazul 3D secvența de Rham exactă cu polinoame complete de grad minim este:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{id} P^3(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} (P^2(\hat{K}))^3 = \mathcal{N}_2^{II}(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^1((\hat{K}))^3 = \\ &= BDM_1(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

cu reprezentarea grafică din Fig. 3.9, în care sunt marcate gradele de libertate și numărul lor, sumă a dimensiunii imaginii și nucleului celor doi operatori succesivi.

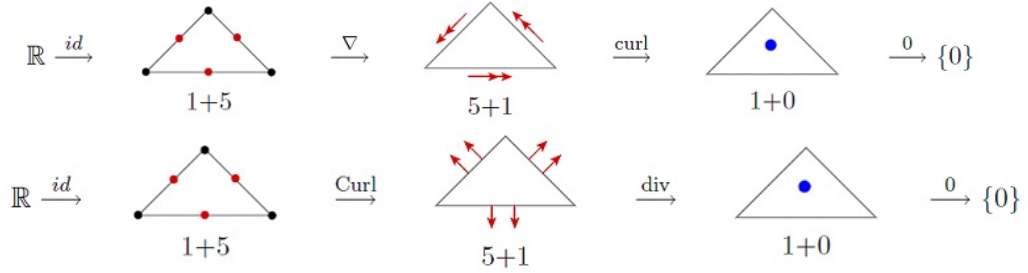


Figura 3.8: Secvența exactă de elemente finite de ordinul doi în 2D: de muchie - Nédélec și de față - BDM [133]

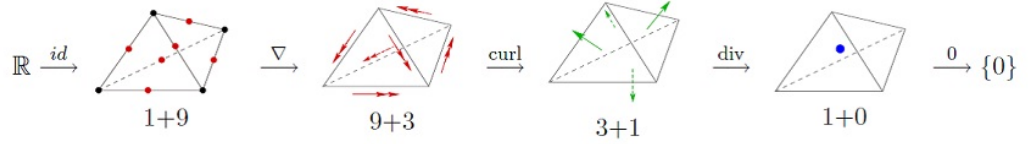


Figura 3.9: Secvența exactă de elemente polinomiale de ordin 2 în 3D: de muchie - Nédélec și de față - BDM [133]

Cu aceste preliminarii teoretice, suntem în măsură să abordăm rezolvarea cu FEM a problemelor din regimurile MG, MQSC și EDC, care au forme slabe de tipul (3.25), în care intervin operatorii *rot-rot*.

Și de această dată, partea centrală a algoritmului constă în asamblarea matricei sistemului $\mathbf{A}$ și a vectorului termenilor liberi $\mathbf{f}$. Pentru aceasta se parcurg elementele triangulației T_h și se adaugă contribuția fiecărui element K la cele două matrice de rigiditate și de masă. În final se obține:

$$\mathbf{A} = \sum_{K \in T_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{A}^K \mathbf{C}^K, \quad \mathbf{f} = \sum_{K \in T_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{f}^K, \quad (3.38)$$

în care matricea $\mathbf{C}^K$ este matricea topologică, de conectivitate, care descrie relația dintre gradele locale de libertate și cele globale. Aceasta este o matrice rară cu elemente egale $+1$ sau -1 , după cum muchia locală coincide ca sens cu cea globală sau nu și zero în rest. Constatăm ca spre deosebire de elementele nodale, cele de muchie sunt orientate și acest lucru trebuie tratat cu grijă la asamblarea matricei $\mathbf{A}$, folosind matrice de selecție cu elemente, care au nu numai valori pozitive ci și negative. O metodă simplă este să se considere că muchiile sunt orientate în ordinea crescătoare a numărului nodurilor, atât local cât și global. Și de aceasta dată, matricea $\mathbf{A}$ este rară.

Și de aceasta dată, pentru a simplifica și modulariza programarea se folosește elementul de referință $\hat{K}$ și o transformare conformă $\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$, cu $x = \Phi(\hat{x})$,

care duce pe $\widehat{K}$ în elementele fizice K , ce alcătuiesc rețeaua de discretizare spațială. Vom nota cu $\mathbf{F}_K$ matricea jacobian a transformării conforme și cu J determinantul său. Gradele de libertate își prezervă valoarea, dar funcțiile de forma și coordonatele se transformă conform.

Contribuțiile elementului K la matricele sistemului sunt [133]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_K \mu^{-1} \text{rot } \varphi_\alpha \text{rot } \varphi_\beta dx + \int_K k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx - \\ &- \int_{\widehat{K}} \mu^{-1} J^{-1} (F_K \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) dx + \\ &+ \int_{\widehat{K}} k (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) d\widehat{x} \\ \mathbf{f}_\alpha^K &= \int_K \mathbf{j} \varphi_\alpha dx = \int_{\widehat{K}} \mathbf{j} (F_K^{-T} \widehat{\varphi}_\alpha) d\widehat{x}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

în care $\widehat{\varphi}_\alpha$ sunt funcțiile de formă ale elementului de referință, care generează un spațiu de elemente finite locale, rot-conform, parte din $H(\text{rot}, \Omega)$. Aici s-a notat cu $\mathbf{j}$ sursa internă de câmp - densitatea de curent și cu $\mu = 1/\nu$ permeabilitatea magnetică, în cazul în care se rezolvă ecuația satisfăcută de potențialul magnetic vector.

În cazul 2D, expresia capătă o formă mai simplă:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_{\widehat{K}} \mu^{-1} J^{-1} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta dx + \\ &+ \int_{\widehat{K}} k (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) J d\widehat{x}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

în care primul termen este matricea "de rigiditate", iar al doilea este matricea "de masă".

De exemplu, în cazul 2D cu elemente de muchie Nédélec, de speța întâi, la care funcția de forma este $\varphi_i = (a_{1i} + b_i y)\mathbf{i} + (a_{2i} - b_i x)\mathbf{j}$ cu $\text{rot } \varphi_i = -2b_i \mathbf{k}$, sau în coordonate baricentrice $\varphi_i = \lambda_j \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_j$ cu $\text{rot } \varphi_i = 2 \nabla \lambda_j \times \nabla \lambda_k$, deci $\text{rot } \varphi^k = -2k$ [14]:

$$\mathbf{A}_{ij}^K = \mathbf{S}_{ij}^K + \mathbf{M}_{ij}^K, \quad (3.41)$$

cu

$$\mathbf{S}_{ij}^K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} / A, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^K = 2A \begin{pmatrix} \nabla \lambda_2 \\ \nabla \lambda_2 \mathbf{M}_{22} + \nabla \lambda_2 \\ \nabla \lambda_3 \mathbf{M}_{23} + \nabla \lambda_3 \\ \nabla \lambda_3 \mathbf{M}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

cu $A = J/2$ este aria triunghiului și

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{22} &= \begin{bmatrix} +3 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{23} &= \begin{bmatrix} +3 & +3 & +1 \\ +3 & +3 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{33} &= \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^K &= j^K A \int_{\hat{K}} \mathbf{F}_K^{(-T)} \varphi_i d\hat{x} \Rightarrow \\ \mathbf{f}_1^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [-1 \ 1]' / 3, \\ \mathbf{f}_2^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [-1 \ -2]' / 3, \\ \mathbf{f}_3^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [2 \ 1]' / 3, \end{aligned} \quad (3.45)$$

în care, în cazul transformării conforme afine

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

iar $\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2$, $\lambda_2 = x^1$, $\lambda_3 = x^2$.

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 &= [-1 \ -1]'; \\ \nabla \lambda_2 &= [1 \ 0]'; \\ \nabla \lambda_3 &= [0 \ 1]'; \\ \varphi_1 &= \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2 = [0, x^1]' - [x^2, 0]' = [-x^2, x^1]'; \\ \varphi_2 &= \lambda_3 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_3 = x^2 [-1 \ -1]' - (1 - x^1 - x^2) [0 \ 1]' = [-x^2, -1 + x^1]'; \\ \varphi_3 &= \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 = (1 - x^1 - x^2) [10]' - x^1 [-1 - 1] = [1 - x^2, x^1]'; \end{aligned} \quad (3.47)$$

au divergența nulă și rotor constant pe element.

Combi-na-țiile liniare ale unor astfel de funcții de formă sunt potrivite să reprezinte

atât distribuția inducției magnetice cât și cea a potențialului magnetic vector în condiții de etalonare coulombiană. În acest caz, gradele de libertate sunt tensiunile de-a lungul laturilor interioare ale triunghiurilor rețelei de discretizare. Valorile acestor tensiuni pe laturile de pe frontiera domeniului sunt condiții esențiale de frontiera.

Un cod MATLAB pentru elemente de față este disponibil în [5], iar pentru elemente de muchie în [14]. După cum se va vedea totuși, în capitolul 3.5, aceste complicații (utile de altfel din punct de vedere didactic) se evită, deoarece problemele de regim magnetic staționar plan-paralele 2D, cu câmp magnetic transversal se reduc la probleme scalare *div-grad*.

Dificultățile întâlnite în asamblarea matricelor elementelor de muchie și de față sunt tratate într-o lucrare recentă [85], dovadă privind actualitatea temei.

3.4 Elemente finite de ordin superior

3.4.1 Rata și ordinul de convergență

Obiectivul acestui capitol constă în studiul performanțelor metodei elementului finit și a modului în care acestea pot fi îmbunătățite. Principalele performanțe ale unei metode numerice, cum este și metoda elementului finit se referă la acuratețea soluției numerice și la costul determinării ei.

Acuratețea soluției numerice este măsurată de distanța între aceasta și soluția exactă. De multe ori se calculează *eroarea relativă*, raportând această distanță la norma soluției exacte. Aceasta definiție este inutilă în majoritatea cazurilor practice, deoarece ea folosește soluția exactă, care este necunoscută. Valoarea exactă a erorii este calculată doar în cazurile de test, în care se rezolvă o problemă cu soluție cunoscută, tocmai pentru a evalua performanța algoritmului.

O altă dificultate constă în alegerea normei ce va fi folosită pentru evaluarea erorii. Cea mai simplă alegere este norma L^2 , dar când se dorește să fie controlată nu numai valoarea soluției, care este de regulă un potențial ci și derivata spațială a acesteia, care este un câmp, se folosește norma Sobolev, care adaugă la norma din L^2 și norma L^2 a derivatei (*grad*, *rot* sau *div*). În multe cazuri se folosește seminorma, definită ca norma L^2 a derivatei soluției, numită și norma energetică, deoarece este chiar energia câmpului. Ea este indusă de produsul scalar definit de funcționala biliniară $a(.,.)$, care intervine în forma slabă a ecuației.

O altă abordare ar fi cea în care se determină norma reziduului ecuației rezolvate. Totuși, această abordare nu este de încredere în toate cazurile, deoarece se pot da ușor exemple de probleme care au soluții aproximative cu eroare mare, dar cu o valoare mică a normei reziduului. Metoda cea mai frecvent folosită pentru estima-

rea acurateții este bazată pe majoranți ai erorii reale, care se determină a posteriori, pe baza soluției numerice. Aceștia se numesc *indicatori ai erorii* și au un caracter local, evidențiind repartitia spațială a erorii, motiv pentru care ei sunt utili la controlul rafinării adaptive a rețelei de discretizare. Ultima categorie de *estimatori de eroare*, sunt cei cu caracter aprioric, care sunt majoranți ai erorii globale, pe care se bazează demonstrația convergenței soluției numerice către soluția exactă, și care sunt utili în predicția ratei de convergență.

Costul determinării soluției se referă la *necesarul de resurse de calcul*, în special necesarul de memorie și de timp de calcul. Cel mai important parametru de care depinde acest cost este numărul N al gradelor de libertate. Cu cât acesta este mai mare, cu atât matricea sistemului ce trebuie rezolvat are dimensiune mai mare, ceea ce sporește atât necesarul de memorie, cât și timpul de calcul necesar generării sistemului și rezolvării acestuia. Un parametru de performanță este și simplitatea algoritmului. Pentru că, la fel de important (poate chiar și mai important) ca timpul de calcul este timpul programatorului. Mai sunt și alți parametri de performanță, de exemplu raritatea matricei sistemului și numărul ei de condiționare, dar aceștia ies pentru moment în afara interesului acestei lucrări. Notăm totuși ca în cazul rețelelor de discretizare cu elemente *quasi-degenerate* (cu unghiuri foarte mici sau foarte mari) și în cazul unor mari variații ale constantelor de material, matricea sistemului liniar poate fi *extrem de slab condiționată*, iar acesta să ajunga aproape imposibil de rezolvat. Indicatori asupra *calității rețelei* sunt prezentați și discutați în [77].

Trebuie să remarcăm că cele două obiective: sporirea acurateții și micșorarea efortului de calcul sunt într-o contradicție puternică. Dacă dorim micșorarea erorii de metodă, atunci numărul gradelor de libertate trebuie crescut, și reciproc, scăderea acestui număr duce la creșterea erorii. Modul în care depinde eroarea soluției numerice de numărul gradelor de libertate este o funcție caracteristică a metodei folosită pentru rezolvarea problemei. De obicei această funcție se reprezintă grafic în scara dublu logaritmică. Panta tangentei dusă la acest grafic se numește *rata de convergență* și este cel mai important parametru de performanță al metodei numerice. De regulă modulul acestei rate este cuprins între $1/2$ și 2 , cu cât este mai mare, cu atât algoritmul este mai performant. Dacă rata de convergență este de exemplu egală cu doi, atunci înzecirea numărului de necunoscute adaugă încă două cifre semnificative corecte la soluție.

După cum rezultă din teorema convergenței, prezentată anterior, eroarea soluției numerice are expresia:

$$\begin{aligned} err &= \|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^{p+1}|u|_{H_{p+1}} = O(h^{p+1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log err \leq C' + (p+1) \lg h, \end{aligned} \quad (3.48)$$

în care p este ordinul elementului finit (gradul polinomului - funcție de formă) iar h este măsura rețelei (cel mai mare diametru al unui element K). Numărul

gradelor de libertate este proporțional cu numărul de elemente din domeniu, după relația: $N \cong c \text{Mes}(\Omega)/h^d$, deci $\lg h = c' - \frac{\lg N}{d}$, în cazul rețelelor de discretizare relativ uniforme. În consecință,

$$err = O(N^{-(p+1)/d}) \Rightarrow \log err < C + (p+1) \lg h = C' - \frac{p+1}{d} \lg N \quad (3.49)$$

de unde rezultă că rata de convergență a metodei elementului finit este $(p+1)/d$, care în cazul elementelor finite triunghiulare ($d = 2$) de ordinul întâi, "liniare" (pentru care $k = 1$) are valoarea 1, în condițiile în care, soluția exactă este suficient de netedă $u \in H^2(\Omega)$. În problemele tridimensionale rata de convergență scade la $2/3$. Rata de convergență este mai mică de atât, dacă soluția are puncte singulare, de exemplu colțuri sau muchii înfundate în domeniul Ω , care scad netezimea soluției. Dacă soluția $u \in H^k(\Omega)$, adică ea are derivatele până la ordinul k de pătrat integrabil, atunci $err = O(h^q)$, în care $q = \min\{p+1, k\}$ se numește *ordinul de convergență* [49]. Când $q = 1$, convergența se numește liniară (eroarea scade proporțional cu norma h a rețelei), iar când $q = 2$, convergența se numește pătratică (eroarea scade mai rapid, proporțional cu pătratul parametrului h). O degradare a ordinului de convergență se constată și atunci când sursa de câmp nu este netedă (de exemplu este concentrată, ca o distribuție de tip Dirac), sau atunci când frontierele curbe sunt approximate prin linii poligonale, lucru implicit în cazul elementelor finite triunghiulare sau tetraedrale [49].

Trebuie să remarcăm că în cazul neted, elementele finite de ordin minim au $err = O(h^2)$, indiferent de dimensiunea d , dar exprimarea erorii în funcție de N este mult mai relevantă, mai ales în cazul rafinării adaptive a rețelei de discretizare, în care parametrul h nu mai are relevanța așteptată. Aceasta deoarece, în acest caz, pe măsura rafinării, N crește, dar h se menține constant.

3.4.2 Rafinarea adaptivă , de tip h

Din expresia erorii $err = O(h^{p+1})$ prezentată anterior, rezultă că, pentru a crește acuratețea soluției numerice avem două căi: scaderea lui h (rafinarea rețelei de discretizare) și creșterea lui p (gradul polinoamelor care constituie funcțiile de formă). În cazul ordinului minim $p = 1$, teoretic convergența este pătratică, dar în practică, datorită singularităților soluției exacte, ordinul de convergență este depreciat la unul liniar $err = O(h)$, caz în care nu se justifică folosirea unor polinoame de grad mai înalt $p > 1$, pentru ca ordinul convergenței nu poate depăși valoarea $q = \min\{p+1, k\}$. O metodă de a recupera deprecierea datorată singularităților este de a folosi un *algoritm auto-adaptiv de rafinare* a rețelei de discretizare - "Adaptive Mesh Refinement" - AMR, tehnică numită și "Adaptive Finite Element Method" - AFEM [14]. Acest algoritm iterativ pornește de la o rețea grosieră, și rezolvă problema pe rețele de discretizare cu tot mai multe elemente, și

deci cu mai multe grade de libertate. La fiecare iterație, o parte a elementelor, mai exact cele în care soluția are o eroare inadmisibilă sunt rafinate, prin divizarea lor. De exemplu, în 2D, un triunghi se poate împărți în 2, 3 sau 4 subtriunghiuri, după cum se introduc noduri suplimentare în mijlocul unei laturi, a două laturi sau pe toate cele trei laturi [43]. Elementul cel mai important al unei proceduri de rafinare auto-adaptivă AMR este folosirea unei estimări robuste și precise a erorii soluției.

În literatură sunt descriși mai mulți estimatori atât din categoria *apriori* (ce pot fi evaluați înainte de calculul numeric) cât și *aposterior*, dar majoritatea implementărilor folosesc indicatori din a doua categorie, datorită preciziei lor suplimentare. Indicatorii de eroare au un caracter local și sunt folosiți pentru a decide care muchii trebuie divizate, în timp ce estimatorii de eroare au un caracter global, sunt obținuți de regulă prin sumarea indicatorilor pe întreaga rețea și sunt folosiți pentru a decide când poate fi oprită procedura iterativă de rafinare succesivă. Un bun indicator de eroare trebuie să fie nu numai precis ci și simplu de implementat și să aibă un cost mic de calcul.

Estimarea erorii se face fie folosind soluția numerică și derivatele ei (tehnica numită de post-procesare), fie folosind abordări complementare, care dau încadrări ale soluției. Pentru a identifica singularitățile soluției, care pot fi de natură geometrică (colțuri, muchii) sau de natură fizică (discontinuități de material sau de surse), indicatorii de eroare folosesc aproximări netezite ale soluției în aceste zone de singularitate. Aceste operații de post-procesare permit evaluarea mai precisă a derivatelor soluției. Metoda complementarității este precisă, dar necesită un efort de calcul relativ mare, deoarece problema trebuie rezolvată de două ori la fiecare iterație [18], [120]. În [67] se propune un indicator simplu de eroare, definit în fiecare element (triunghi sau tetraedru), de norma diferenței dintre gradientul soluției (componentele câmpului) și o aproximare netezită a acestuia, obținută prin interpolarea cu funcțiile de bază liniare ale valorilor componentelor gradientelor din vârfurile elementului, valori calculate ca media din elementele vecine. În acest fel, soluția este netezită prin medierea ei, nu numai pe elementul curent ci și în toate elementele vecine cu acesta. Estimatorul global de eroare are pentru cele N elemente expresia:

$$\eta_\tau = \left\{ \frac{\|e_{g_i}\|_{L_2}}{\left[\sum_{i=1}^N \|g_i\|^2 + \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}} \right\} 100\% \quad (3.50)$$

în care g_i este gradientul local în elementul i iar

$$\|e_{g_i}\|^2 = \left\{ \sum_{i=1}^N \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.51)$$

cumulează abaterile gradientilor $e_{g_i} = g_i - g^i$ din toate elementele. Aici s-a notat cu g^i gradientul netezit din elementul i , obținut prin interpolarea valorilor medii din vârfurile elementului i :

$$\tilde{g}_x = N\bar{g}_x, \quad \tilde{g}_y = N\bar{g}_y \quad (3.52)$$

Vor fi divizate elementele care au e_{g_i} în norma mai mare decât valoarea admisibilă:

$$\|e_{g_i}\| \leq \eta_\tau \left[\frac{\left\{ \sum_{i=1}^N \|g_i\|^2 + \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right\}}{N} \right]^{1/2} = e \quad (3.53)$$

Alți indicatori și estimatori de eroare sunt prezentați în [43], [96], [64]. Majoritatea acestor indicatori măsoară norma reziduu ecuației pe elementul curent K și saltul derivatei după normală a soluției pe fețele elementului:

$$\eta_K^2 = \eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2 \quad (3.54)$$

$$\eta_{B_K}^2 = \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K)}^2 \quad (3.55)$$

$$\eta_{E_K}^2 = \sum_{e \in \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \quad (3.56)$$

în care f_{p_K} este proiecția sursei pe spațiul polinoamelor de grad $p_K - 1$, iar $[\cdot] = \text{div}_s$ este saltul la trecerea prin frontiera elementului K , egal cu divergența superficială a câmpului. Este evident că pentru soluția exactă, acest indicator are valoare nulă.

În Fig. 3.10 este reprezentată rețeaua de discretizare generată în urma rafinării adaptive AMR. Se constată că rețeaua este îndesită selectiv, în special în vecinătatea colțului care generează singularitatea. Pentru această problemă este prezentat în Fig. 3.11 modul în care variază eroarea relativă în funcție de numărul de noduri N_n (numarul gradelor de libertate), pentru cazul rafinării uniforme a rețelei

de discretizare și în cazul rafinării adaptive. Se constată că în primul caz rata de convergență este aproximativ 0,7, valoare corespunzătoare unui ordin de convergență $q = 1,4 \cong 4/3 < 2$ (care este valoarea ideală, în absența singularității). În schimb, în cazul adaptiv, rata de convergență este unitară $err = O(N_n^{-1})$, care ar corespunde în cazul unei rețele uniforme la o convergență pătratică, care este maximul ideal. Această estimare are mai mult un caracter teoretic, deoarece nu trebuie să uităm că în abordarea adaptivă, nu rezolvăm un singur sistem de ecuații, ci o serie de sisteme de dimensiuni din ce în ce mai mari. Chiar și așa, folosirea rețelelor adaptive este recomandabilă, deoarece acestea sunt optime și oferă un control al erorii de metodă. În ultima perioadă, strategiile adaptive AMR de analiză cu elemente finite nu sunt numai proceduri recomandabile, ci ele tind să devină abordările standard. Iar pentru a compara performanțele procedurilor adaptive de rezolvare, cel mai relevant este modul în care indicatorul global de eroare depinde de timpul de calcul, necesar efectuării iterațiilor de rafinare succesivă a rețelei.

Pe de altă parte, se pot obține accelerări extraordinare ale vitezei de calcul, deoarece folosirea diferitelor nivele de rafinare în rezolvarea iterativă a sistemului de ecuații conduce la preconditionarea multigrid (Fig. 3.12), care este cea mai rapidă metodă cunoscută în prezent pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor eliptice reale [53], (<http://www.mgnet.org/>). În principiu, *tehnica multigrid* presupune parcurgerea ierarhiei de rețele de la cea mai fină la cea mai grosieră și înapoi, efectuând operațiile de *netezire* (reducerea erorilor "de înaltă frecvență"), de *restricție* (transferul reziduului pe o rețea mai grosieră), iar la întoarcere, operația de *interpolare* (transferul reziduului pe o rețea mai fină). (http://en.wikipedia.org/wiki/Multigrid_method). Ciclul multigrid poate fi folosit ca atare în rezolvare, dar se preferă să fie folosit ca preconditionare pentru metodele iterative de tip Krylov [71], ca de exemplu metoda gradientilor conjugați (CG), folosită pentru matricele simetrice și pozitiv definite, cum sunt matricele generate de FEM aplicată ecuațiilor eliptice. De obicei, după mai puțin de zece iterații se obține o soluție cu precizie acceptabilă.

Complexitatea algoritmului este liniară, timpul de calcul având ordinul $O(N)$, ceea ce este ideal [22]. O listă codurilor multigrid din domeniul public este disponibilă la (<http://www.mgnet.org/mgnet-codes.html>).

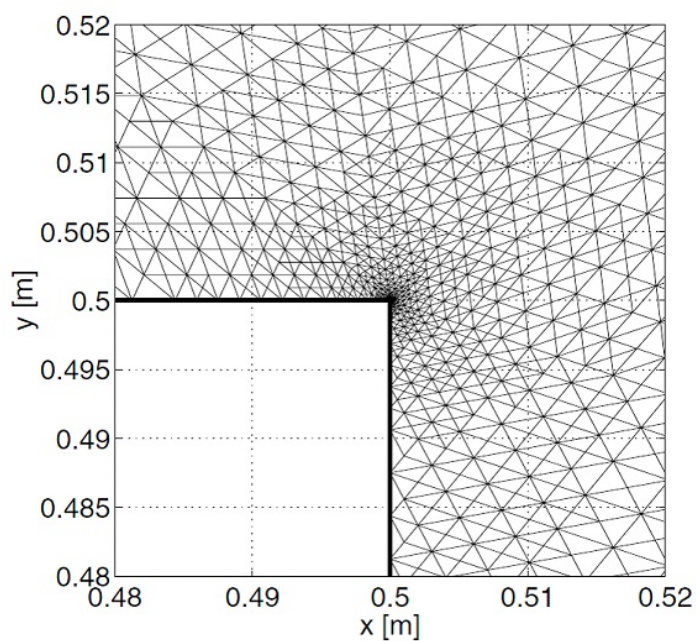


Figura 3.10: Exemplu de rețea de discretizare adaptivă [14]

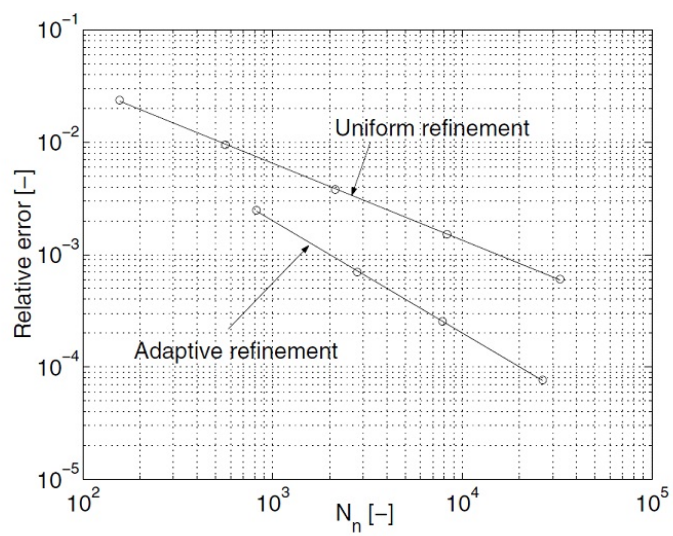


Figura 3.11: Eroarea relativă în funcție de numărul de noduri, pentru rafinare uniformă și adaptivă [14]

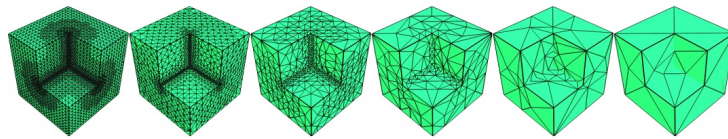


Figura 3.12: FEM multigrid cu rafianare adaptivă (<http://people.cs.uchicago.edu/~knepley/>)

3.4.3 Elemente scalare de ordin superior. Rafinarea p

Dupa cum am constatat anterior, o altă metodă de a scădea eroarea este de să creștem gradul polinoamelor folosite în definirea funcțiilor de formă. În cazul bidimensional, polinomul de grad n în două variabile conține termeni de forma $x^p y^q$, cu $p + q \leq n$, care pot fi grupați în triunghiul lui Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & x & y \\
 & & x^2 & & xy & & y^2 \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3
 \end{array} \tag{3.57}$$

fiecare polinom complet având $m = (n + 1)(n + 2)/2$ termeni. Adică $m = 1, 3, 6, 10, \dots$ pentru $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ceea ce înseamnă că polinomul este determinat de m coeficienți, sau echivalent de valorile lui în m puncte nodale din interiorul triunghiului. Prin *unisolență*, proprietate caracteristică a acestor polinoame, înțelegem faptul că dacă valoarea este nulă în noduri atunci și coeficienții sunt nuli, deci polinomul este identic nul. Aceste puncte se aleg de preferință în vârfuri și pe laturi. În consecință, cunoașterea valorilor din noduri determină o soluție unică în întreg domeniul de calcul. Aceasta nu numai că este unică ci este și continuă, deoarece pe fețele și muchiile comune avem tot polinoame unisolvante. De exemplu, polinomul de gradul întâi este determinat de valorile lui din cele trei vârfuri, polinomul de gradul doi are pe lângă aceste puncte, ca noduri și mijloacele laturilor, adică în total 6 grade de libertate. Polinomul de gradul trei are 10 noduri: trei în vârfuri, câte două pe fiecare latură și unul în centrul triunghiului. Spunem că funcțiile de bază sunt izoparametrice, deoarece numărul lor de parametri (grade de libertate) este egal cu numărul de noduri.

Funcțiile de bază se anulează în toate nodurile, cu excepția unuia, în care funcția are valoare unitară. Pentru gradul $n = 2$, funcțiile de bază au graficele similare cu cele reprezentate în Fig. 3.13 Rotind nodurile se obțin toate cele șase funcții de

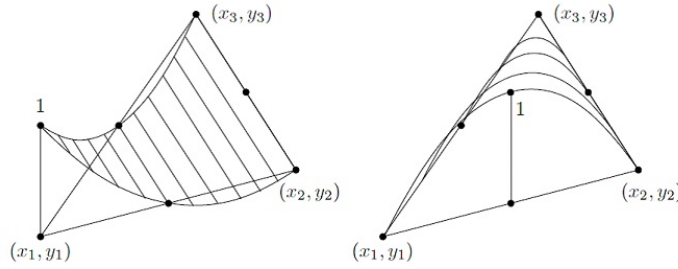


Figura 3.13: Funcții de bază de gradul doi și nodurile lor [78]

bază. Față de coordonatele baricentrice, ele au expresiile:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\
 N_2 &= \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\
 N_3 &= \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\
 N_4 &= 4\lambda_1\lambda_2 \\
 N_5 &= 4\lambda_2\lambda_3 \\
 N_6 &= 4\lambda_3\lambda_1
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

În general, funcțiile de bază au expresiile [78]:

$$N_i = P_I^n(\lambda_1)P_J^n(\lambda_2)P_K^n(\lambda_3), \quad I + J + K = n, \tag{3.59}$$

iar

$$\begin{aligned}
 P_I^n(\lambda_1) &= (1/I!) \quad (p = 0, I - 1) \quad (n\lambda_1 - p), \quad I > 0; \\
 P_J^n(\lambda_2) &= (1/J!) \quad (p = 0, J - 1) \quad (n\lambda_2 - p), \quad J > 0; \\
 P_K^n(\lambda_3) &= (1/K!) \quad (p = 0, K - 1) \quad (n\lambda_3 - p), \quad K > 0;
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

cu $P_0^n = 1$.

Prezența polinoamelor de interpolare Lagrange în aceste relații explică de ce elementele finite care folosesc aceste funcții de bază se numesc elemente finite de tip *Lagrange*. Aceste funcții de bază generează o familie ierarhică de elemente finite nodale de grade crescătoare, definite pe triunghi și are deci valori identice pe această latură.

Funcțiile de formă definite pe întreaga triangulație sunt funcții continue, deoarece în două triunghiuri alăturate, funcția este unic determinată de valorile ei din nodurile plasate pe latura comună a celor două triunghiuri.

În cazul 3D, polinomul de gradul n conține $m = (n+1)(n+2)(n+3)/6$ termeni de forma $x^p y^q z^r$ cu $p+q+r \leq n$, adică 1, 4, 10, 20, ... termeni în polinoamele de

gradul 0, 1, 2, 3, ... Funcțiile de bază din familia ierarhică definite pe tetraedru au expresii similare cu cele din cazul 2D:

$$N_i = P_I^n(\lambda_1)P_J^n(\lambda_2)P_K^n(\lambda_3)P_L^n(\lambda_4), \quad (3.61)$$

în care P sunt polinoamele Lagrange cu $I + J + K + L = n$. De exemplu, în cazul $n = 2$, nodurile sunt plasate în cele 4 vârfuri ale tetraedrului și în mijloacele celor 6 laturi.

3.4.4 Elemente vectoriale de ordin superior

Construirea bazelor vectoriale de elemente de muchie de ordin înalt a reprezentat o preocupare a mai multor cecetări, care au făcut diferite propuneri. Printre primele este baza de gradul al doilea pentru tetraedre, propusă de Lee în [80] și alcătuită din:

$$\{12 \text{ funcții de bază "de muchie" } \lambda_i \nabla \lambda_j \text{ } i \neq j\} \cup \{\lambda_1 \lambda_2 \nabla \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3 \nabla \lambda_2, \lambda_2 \lambda_3 \nabla \lambda_4, \lambda_2 \lambda_4 \nabla \lambda_3, \lambda_3 \lambda_4 \nabla \lambda_1, \lambda_3 \lambda_1 \nabla \lambda_4, \lambda_4 \lambda_1 \nabla \lambda_2, \lambda_4 \lambda_2 \nabla \lambda_1\} \quad (3.62)$$

folosită ulterior pentru dezvoltarea unor baze ierarhice. În [127] sunt inventariate mai multe astfel de baze și sunt studiate folosind tehnici simbolice, iar în [103], patru dintre ele sunt comparate din punctul de vedere al ratei de convergență, a rezolvării iterative a sistemului liniar, obținut prin discretizare. În această lucrare se constată că baza Lee determină cea mai rapidă convergență.

Bazele vectoriale ale elementelor de muchie de ordin înalt se pot genera în mod similar cu cele nodale. De exemplu în 2D, funcțiile de bază ierarhice rot-conforme pentru triunghi au expresiile [78]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{12}^{IJK} &= \alpha_{12}^{IJK} S_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{W}_{23}^{IJK} &= \alpha_{23}^{IJK} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{23} \\ \mathbf{W}_{31}^{IJK} &= \alpha_{31}^{IJK} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{31} \end{aligned} \quad (3.63)$$

în care coeficienții α sunt factori de normalizare, aleși astfel încât integrala de linie a funcției $\mathbf{W}_{ab}^{IJK}$ pe muchia $a - b$ să aibă valoare unitară. Aici s-au notat cu L_k coordonata baricentrică λ_k , cu $\mathbf{w}_{ab}$, funcțiile vectoriale de muchie de ordin minim, cu P polinoamele de interpolare Lagrange, pentru care $P_0(\cdot) = 1$, iar cu S polinoamele Silvester definite astfel:

$$S_J^{n+2}(L_2) = P_{J-1}^{n+2}\left(L_2 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{(J-1)!} \prod_{p=0}^{J-1} [(n+2)L_2 - p]. \quad (3.64)$$

Numarul acestor funcții de bază vectoriale este $k = (n + 1)(n + 3)$. De exemplu, în cazul $n = 1$, cele opt funcții de bază au expresiile:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_1 &= \mathbf{W}_{12}^{120} = \alpha_{12}^{120} S_1^3(L_1) S_2^3(L_2) P_0^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{120} (3L_2 - 1) \mathbf{w}_{12} \\
\mathbf{W}_2 &= \mathbf{W}_{12}^{210} = \alpha_{12}^{210} S_2^3(L_1) S_1^3(L_2) P_0^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{210} (3L_1 - 1) \mathbf{w}_{12} \\
\mathbf{W}_3 &= \mathbf{W}_{12}^{111} = \alpha_{12}^{111} S_1^3(L_1) S_1^3(L_2) P_1^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{111} 3L_2 \mathbf{w}_{12} \\
\mathbf{W}_4 &= \mathbf{W}_{23}^{012} = \alpha_{23}^{012} P_0^3(L_1) S_1^3(L_2) S_2^3(L_3) \mathbf{w}_{23} = \alpha_{23}^{012} (3L_3 - 1) \mathbf{w}_{23} \\
\mathbf{W}_5 &= \mathbf{W}_{23}^{021} = \alpha_{23}^{021} P_0^3(L_1) S_2^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{23} = \alpha_{12}^{021} (3L_2 - 1) \mathbf{w}_{23} \\
\mathbf{W}_6 &= \mathbf{W}_{31}^{102} = \alpha_{31}^{102} S_1^3(L_1) P_0^3(L_2) S_2^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{102} (3L_3 - 1) \mathbf{w}_{31} \\
\mathbf{W}_7 &= \mathbf{W}_{31}^{201} = \alpha_{31}^{201} S_2^3(L_1) P_0^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{201} (3L_1 - 1) \mathbf{w}_{31} \\
\mathbf{W}_8 &= \mathbf{W}_{31}^{111} = \alpha_{31}^{111} S_1^3(L_1) P_1^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{111} 3L_2 \mathbf{w}_{31}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

în care s-a folosit schema de numerotare a indicilor I, J, K reprezentat în Fig. 3.14.

Construcții asemănătoare pentru familii ierarhice de elemntele vectoriale de mu-

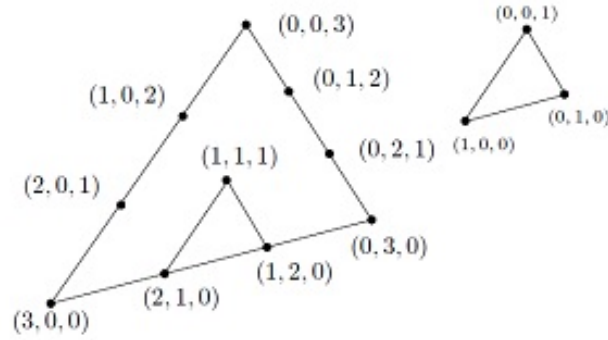


Figura 3.14: Schema de numerotare (I, J, K) asociata elementului de muchie $\mathbf{w}_{12}$ de ordin $n = 1$ [78]

chie de ordin mai înalt se realizează și în tetraedrele din 3D:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{12}^{IJKL} &= \alpha_{12}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{12} \\
\mathbf{W}_{23}^{IJKL} &= \alpha_{23}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{23} \\
\mathbf{W}_{31}^{IJKL} &= \alpha_{31}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{31} \\
\mathbf{W}_{14}^{IJKL} &= \alpha_{14}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{14} \\
\mathbf{W}_{24}^{IJKL} &= \alpha_{24}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{24} \\
\mathbf{W}_{34}^{IJKL} &= \alpha_{34}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{34}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

numai că acum, numărul funcțiilor de baza crește la $k = (n + 1)(n + 3)(n + 4)/2$.

3.4.5 Secvența Rham a bazelor FEM ierarhice

Un mod principal diferit de a construi baze ierarhice, de ordin înalt este prezentat în teza de doctorat [133]. Ideea centrală a tezei este să se construiască baze care satisfac secvența de Rham. Aplicând gradientul elementelor nodale se obțin elementele de muchie, apoi aplicându-le acestora rotorul se obțin elementele de față, iar în final, elementele de celulă se obțin din divergența elementelor de față. Se pornește de la baze de grad minim: elemente finite nodale liniare, elemente de muchie de tip Nédélec și elemente de față de tip Raviart-Thomas, prezentate în capitolul anterior, iar apoi folosind polinoame ortogonale de ordin tot mai mare, se construiește ierarhia de funcții de bază. Scopul este de a construi clase ierarhice de baze conforme în spațiile H^1 , $H(rot)$ și $H(div)$, potrivite pentru rafinarea hp , atât după parametrul geometric h cât și după gradul p , al polinoamelor folosite în aceste baze. Pentru aceste baze, secvența de Rham este exactă, atât local cât și global. Bazele sunt anizotrope, adică pot avea grade diferite pe muchii și fețe diferite, pentru a permite rafinarea geometrică neuniformă a rețelei de discretizare și modelarea foliilor. Gradul polinomului poate avea valori arbitrare doar pe diferite muchii, fețe sau celule elementare, fără ca funcția de bază să piardă conformitatea cu spațiul în care se află, sau să dispară exactitatea secvenței de Rham, căreia îi aparține acel polinom. Mai mult, strategia de construire a bazei trebuie să se aplice pentru diferite forme ale elementelor: triunghi, patrulater, tetraedru, prismă, hexaedru, pentru a permite rețelele de discretizare cu elemente mixte, care apar în urma rafinării locale. Trebuie să reținem că elementele geometrice: muchie, față sunt orientate în ordinea descrescătoare a nodurilor lor. După cum se va vedea, fiecare subspațiu de elemente finite poate avea funcții de bază nodale, de muchie, de față sau de volum (de celulă).

În elementele de referință rectangulare (pătrat, cub) se folosește pentru funcțiile de bază produsul tensorial de polinoame ortogonale Legendre, care are avantajul evaluării rapide, garantează liniar independența, raritatea matricei generate și a foarte bune ei condiționări. În final, se obține o suită de astfel subspații (elemente finite).

Funcțiile de bază (liniar independente) polinomiale pentru elemente patrulater (Q) în $H^1(Q)$, $H(rot, Q)$ și $H(div, Q)$ se definesc astfel:

- Funcții de tip nodal

$$\text{pentru } i = 1, \dots, 4 : \quad \phi_i^V = \lambda_i.$$

- Funcții de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3, 4 : \text{ se consideră muchiile } E_m = [e_1, e_2] ..$$

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 2 : \quad \phi_i^{E_m} = L_{i+2} (\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2})$$

- Funcții celulare

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 2 : \quad \phi_{ij}^C = L_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1)$$

față de coordonatele (biliniare și respectiv liniare):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= (1 - x)(1 - y) & \sigma_1 &:= (1 - x) + (1 - y) \\ \lambda_2 &:= x(1 - y) & \sigma_2 &:= x + (1 - y) \\ \lambda_3 &:= xy & \sigma_3 &:= x + y \\ \lambda_4 &:= (1 - y) + x & \sigma_4 &:= (1 - x) + y \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ele definesc subspațiile:

$$\begin{aligned} W^V(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_m^V)_{1 \leq m \leq 4} \right), \\ W_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_i^{E_m})_{1 \leq i \leq p_{E_m} - 1} \right), \quad m = 1, \dots, 4 \\ W_{p_C}^C(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_{ij}^C)_{1 \leq i, j \leq p_C} \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

care adunate dau subspațiul polinomial de grad $\mathbf{p}$ al elementelor finite patrulate din $H^1(Q)$:

$$W_{\mathbf{p}}(\mathcal{Q}) := W^V(\mathcal{Q}) \oplus \bigoplus W_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) \oplus W_{p_C}^C(\mathcal{Q}) \quad (3.69)$$

în care $\mathbf{p} = (p_{E_1}, p_{E_2}, p_{E_3}, p_{E_4}, p_C)$ este un vector cu componente întregi, care indică gradele polinoamelor de tip muchie și respectiv celula elementară. Dimensiunea acestui spațiu este $|W_{\mathbf{p}}(Q)| = (p + 1)^2$, dacă polinoamele sunt uniforme (au același grad p pe toate muchiile ca și pe celulă).

Funcțiile de bază polinomiale rot-conforme din $H(\text{rot}, Q)$ se obțin aplicând gradientul funcțiilor de baza din H^1 :

- Funcții de tip muchie

pentru $m = 1, 2, 3, 4$: se consideră muchiile $E_m = [e_1, e_2] \dots$

- Funcții de formă de ordin redus

$$\varphi_m^{\mathcal{N}_0} = \frac{1}{2} \nabla ((\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

– Funcții de formă de ordin înalt

$$\text{for } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1 \quad \varphi_i^{E_m} = \nabla (L_{i+2} (\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

• Funcții de bază de tip celulă

– Tipul 1

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 1$$

$$\varphi_{ij}^{C_1} = \nabla (L_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1))$$

– Tipul 2

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 1$$

$$\varphi_{ij}^{C_1} = L'_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1) \mathbf{e}_x - L_{i+2} (2x - 1) L'_{j+2} (2y - 1) \mathbf{e}_y$$

– Tipul 3

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_C - 1$$

$$\varphi_i^{C_3} = L_{i+2} (2y - 1) \mathbf{e}_x;$$

$$\varphi_{i+p_C}^{C_3} = L_{i+2} (2x - 1) \mathbf{e}_y.$$

Acestea genereaza subspatiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 (\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_m^{\mathcal{N}_0})_{1 \leq m \leq 4} \right), \\ V_{p_{E_m}}^{E_m} (\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_i^{E_m})_{0 \leq i \leq p_{E_m} - 1} \right), \\ V_{p_C}^{C_1} (\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_{ij}^{C_1})_{0 \leq i, j \leq p_C - 1} \right), \\ V_{p_C}^{C_2} (\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_{ij}^{C_2})_{0 \leq i, j \leq p_C - 1} \right), \\ V_{p_C}^{C_3} (\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_i^{C_3})_{0 \leq i \leq 2p_C - 1} \right). \end{aligned} \tag{3.70}$$

care adunate dau subspațiul polinomial al elementelor finite patrulare din $H(\text{rot}, \mathcal{Q})$ de grad p :

$$V_p (\mathcal{Q}) := \mathcal{N}_0 (\mathcal{Q}) \oplus \bigoplus_{p_{E_m}} V_{p_{E_m}}^{E_m} (\mathcal{Q}) \oplus V_{p_C}^C (\mathcal{Q}) \tag{3.71}$$

Dimensiunea acestui spatiu este $|Vp(Q)| = 2(p+1)(p+1)$, în cazul polinoamelor uniforme.

Funcțiile de bază polinomiale div-conforme din patrulatere din $H(div, Q)$ pentru Q pătrat în 2D se obțin rotind cu 90 de grade funcțiile de bază din $H(rot, Q)$:

- Funcții de formă de tip muchie

pentru $m = 1, 2, 3$: muchia E^m cu vârfurile $\{e_1, e_2\}$

$$\psi_m^{N_0} = \text{rot } \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \text{rot } \lambda_{e_2}$$

$$\psi_i^{E_m} = \text{rot } (L_{i+2}^S (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1})) , \quad \text{for } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1$$

- Funcții de de formă de tip celulă

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{C_1} &= \text{rot } u_i v_j + u_i \text{rot } v_j, & \text{for } 0 \leq i+j \leq p_C - 2 \\ \psi_{i,j}^{C_2} &= \text{rot } u_i v_j - u_i \text{rot } v_j, & \text{for } 0 \leq i+j \leq p_C - 2 \\ \psi_j^{C_3} &= (\text{rot } \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \text{rot } \lambda_2) v_j, & \text{for } 0 \leq j \leq p_C - 2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

cu $u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ și $v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$

Funcțiile de bază div-conforme în cazul elementelor 2D triunghiulare se obțin din cele prezentate anterior, aplicând transformarea Duffy:

$$\mathcal{D} : Q = [-1, 1]^2 \rightarrow T; \quad (\xi, \eta) \rightarrow (x, y) \quad (3.73)$$

definită ca

$$x = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta); \quad y = \frac{1}{2} (1 + \eta), \quad (3.74)$$

care transforma un pătrat Q în triunghiul de referință T (Fig. 3.15). Transformarea inversă are expresia:

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \frac{x}{1 - y} - 1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \in [-1, 1] \\ \eta &= 2y - 1 = 2\lambda_3 - 1 = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (3.75)$$

în care $\lambda_{1,2,3}$ sunt coordonatele baricentrice ale triunghiului.

Funcțiile de bază ale pătratului se transformă și devin funcțiile de bază ale triunghiului. Se obține următoarea **ierarhie de funcții de forma polinomiale, definite pe triunghi**:

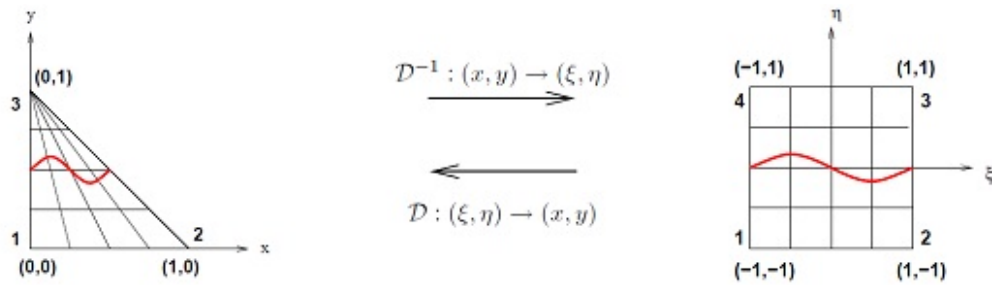


Figura 3.15: Transformarea Duffy între un pătrat și un triunghi de referință [133]

- Funcții de tip nod

$$\text{pentru } i = 1, 2, 3 : \phi_i^V = \lambda_i \quad (3.76)$$

- Funcții de tip muchie

$$\begin{aligned} \text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{muchia } E_m &= [e_1, e_2] \\ \text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 2 : \phi_i^{E_m} &= L_{i+2}^S(\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}, \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

- Funcții de tip celulă

$$\begin{aligned} \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 3, \quad i, j \geq 1 : \\ \phi_{(i,j)}^C &= L_{i+2}^S(\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de bază este $|Wp(T)| = (p + 1)(p + 2)/2$, în cazul polinoamelor unipentru.

Baze ierarhice de ordin superior, rot-conpentru:

- Funcții de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{muchia } E^m = [e_1, e_2].$$

- Funcțiile ordin redus

$$\varphi_m^{\mathcal{N}_0} = \nabla \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \nabla \lambda_{e_2}$$

– Funcțiile de ordin înalt

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1 \quad \varphi_i^{E_m} = \nabla (L_{i+2} (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

• Funcțiile de tip celulă

Definim

$$u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ și } v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$$

$$\text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2, \quad i, j \geq 0$$

– Tipul 1 (câmpuri de gradienti)

$$\varphi_{i,j}^{C_1} = \nabla (u_i v_j) = \nabla u_i v_j + u_i \nabla v_j$$

– Tipul 2

$$\varphi_{i,j}^{C_2} = \nabla u_i v_j - u_i \nabla v_j$$

– Tipul 3

$$\varphi_{0,i}^{C_3} = (\nabla \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nabla \lambda_2) v_j$$

Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de baza este $|V_p(T)| = (p+1)(p+2)$, în cazul polinoameleor unipentru, număr egal cu cel specificat anterior pentru construcția cu polinoame Lagrange-Sylvester.

Baze ierarhice polinomiale de ordin superior div-conpentru pe triunghi:

• Funcții de pentrumă de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{ muchia } E^m \text{ cu vârfurile } \{e_1, e_2\}$$

$$\psi_m^{N_0} = \text{rot } \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \text{rot } \lambda_{e_2}$$

$$\psi_i^{E_m} = \text{rot } (L_{i+2}^S (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1})) , \quad \text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1$$

• Funcții de pentrumă de tip celulă

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{C_1} &= \text{rot } u_i v_j + u_i \text{rot } v_j, & \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2 \\ \psi_{i,j}^{C_2} &= \text{rot } u_i v_j - u_i \text{rot } v_j, & \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2 \\ \psi_j^{C_3} &= (\text{rot } \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \text{rot } \lambda_2) v_j, & \text{pentru } 0 \leq j \leq p_C - 2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\text{cu } u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ și } v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$$

Și de această dată funcțiile de bază se obțin prin rotirea cu 90 de grade a funcțiilor

de bază ale subspațiului $V_p(T)$. Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de bază este $|Q_p(T)| = (p+1)(p+2)$. După modelul din 2D, procedura de generare a funcțiilor de bază se extinde și în cazul 3D, cu aplicații la elemente hexaedrale și respectiv tetraedrale. Aplicând transpentrurarea Duffy, succesiv diferitelor fețe ale hexaedrului acesta colapsează într-o prismă, apoi într-o piramidă și în final în tetraedru. Spațiul elementelor finite polinomiale poate fi generat de funcțiile de bază:

$$P^p(\mathcal{T}) := \{x^i y^j z^k : 0 \leq i + j + k \leq p, i, j, k \geq 0\}, \quad (3.80)$$

care dacă au ordin unipentru generază secvența:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^{p+1}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\nabla} P^p(\mathcal{T}) \xrightarrow{rot} P^{p-1}(\mathcal{T}) \xrightarrow{div} P^{p-2}(\mathcal{T}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.81)$$

Realizând o construcție cu polinoame ortogonale Legendre, așa cum s-a procedat în cazul 2D se obține și în 3D pentru fiecare element, o secvență de tip de Rham, dar de această dată, dimensiunile subspațiilor elementelor nodale, de muchie, de față și de volum au în cazul polinoamelor unipentru valorile:

$$\begin{aligned} |W_p(H)| &= (p+1)^3; \\ |V_p(H)| &= 3(2+2)^2(p+1); \\ |Q_p(H)| &= 3(p+2)(p+1)^2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

în care H este elementul hexaedral și

$$\begin{aligned} |W_p(T)| &= (p+1)(p+2)(p+3)/6; \\ |V_p(T)| &= (p+1)(p+2)(p+3)/2; \\ |Q_p(T)| &= p(p+1)(p+2)/2, \end{aligned} \quad (3.83)$$

în care T este elementul tetraedral.

Funcțiile de bază definite pe elementul de referință $\hat{K}$ se extind prin transpentrurări conpentrume $\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$ pe elementele fizice K și devin funcții de pentrumă definite pe întreaga rețea de discretizare (T_h) . Funcțiile de bază se transpentrură astfel:

- în cazul elementelor din H^1 : $\phi := \hat{\phi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor din $H(rot)$: $\varphi := \mathbf{F}_K^{-T} \hat{\varphi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor din $H(div)$: $\psi := J_K^{-1} \mathbf{F}_K \hat{\psi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor celulare, din L_2 : $\vartheta := J_K^{-1} \hat{\vartheta} \circ \Phi_K^{-1}$.

O proprietate remarcabilă a construcției descrisă în [133] și prezentată anterior este aceea că secvența de Rham este exactă nu numai pentru elementele de referință ci și pentru întreaga triangulație, cât și pentru o parte a ei:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} W_{h,p+1}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{\nabla} V_{h,p}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{rot} Q_{h,p}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{div} S_{h,p}(\mathcal{T}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.84)$$

Aceasta proprietate face ca algoritmi de rezolvare iterativă a ecuațiilor *rot-rot* să fie mult mai stabili și mai robuști, decât în cazul în care această condiție nu este îndeplinită. Strategii pentru construirea bazelor ierarhice pentru elementele finite, de muchie și de față sunt prezentate și în [59], [60], [61], [50],

[81]. Un rol important în estimarea erorii de metodă a soluției numerice cu elemente finite și în studiul convergenței acestei metode îl are următoarea *diagramă comutativă*:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(rot, \Omega) & \xrightarrow{rot} & H(div, \Omega) & \xrightarrow{div} & L_2(\Omega) \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \parallel \\ W & & V & & Q & & S \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \parallel \\ W_h & \xrightarrow{\nabla} & V_h & \xrightarrow{rot} & Q_h & \xrightarrow{div} & S_h \end{array} \quad (3.85)$$

în care sunt evidențiate spațiile Sobolev, în secvența de Rham și subspații ale lor cu funcții suficient de netede, notate cu W, V, Q și S , care sunt approximate cu subspațiile discrete, de elemente polinomiale nodale, de muchie, de față și de volum: W_h, V_h, Q_h și respectiv S_h . În consecință, operatorii de interpolare nodală

$\Pi_X(v) = \sum_{i=1}^N N_i(v)\varphi_i$ satisfac relațiile:

$$\begin{aligned} \Pi_V \nabla w &= \nabla \Pi_W w \quad \forall w \in W \subset H^1(\Omega), \\ \Pi_Q \nabla \mathbf{v} &= rot \Pi_V \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V \subset H(rot, \Omega), \\ \Pi_S \nabla \mathbf{q} &= div \Pi_Q \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{q} \in Q \subset H(div, \Omega). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Și implicit, de la caz la caz, relațiile Stokes, Gauss și Green. Teorema care estimează apriori "**eroarea de interpolare**" afirmă că [133], [120]:

- $\|w - \Pi_W w\|_1 \preceq h^{s-1} \|w\|_s$ pentru $\forall w \in H^s(\Omega)$ cu $3/2 + \delta \leq s \leq k+1, \delta > 0$ și W_h spațiul elementelor finite de grad k ;
- $\|\mathbf{v} - \Pi_V \mathbf{v}\|_0 \preceq h^s (\|\mathbf{v}\|_s + \|rot \mathbf{v}\|_s)$ pentru $\forall \mathbf{v} \in (H^s(rot, \Omega))^3$ cu $1/2 + \delta \leq s \leq k+1$ și V_h spațiul elementelor de muchie de grad k ;
- $\|\mathbf{q} - \Pi_Q \mathbf{q}\|_0 \prec h^s \|\mathbf{q}\|_s$ pentru $\forall \mathbf{q} \in (H^s(div, \Omega))^3$ cu $1/2 + \delta \leq s \leq k+1$ și Q_h spațiul elementelor de față de grad k .

Aici s-a notat cu $\prec$ marginirea cu o constanta : $\prec C$. Aceste relații generalizează teorema convergenței, bazată pe estimarea apriori a erorii și prezentată anterior, pentru cazul scalar.

3.4.6 Crime variaționale

Un alt aspect referitor la eroarea de metodă care trebuie menționat este cel cunoscut sub numele de "*crima variațională*". Aceasta apare atunci când este violată condiția de ortogonalitate Galerkin (3.6)[120], [119]. După cum am văzut, contribuțiile elementelor la matricea sistemului și la termenii liberi se calculează în problemele scalare *div-grad* cu relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^K &= \int_K \varepsilon^K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \int_K \kappa \varphi_i \varphi_j dx \\ \mathbf{f}_i^K &= \int_K \mathbf{f} \varphi_i dx \end{aligned} \quad (3.87)$$

iar în cazul problemelor vectoriale de tip *rot-rot* cu relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_K \mu^{-1} \text{rot } \varphi_\alpha \text{rot } \varphi_\beta dx + \int_K \kappa \varphi_\alpha \varphi_\beta dx - \\ &- \int_{\hat{K}} \mu^{-1} \mathbf{J}^{-1} (F_K \text{rot } \hat{\varphi}_\alpha) (F_K \text{rot } \hat{\varphi}_\beta) dx + \\ &+ \int_{\hat{K}} \kappa (F_K^{-T} \text{rot } \hat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \hat{\varphi}_\beta) d\hat{x} \\ \mathbf{f}_\alpha^K &= \int_K \mathbf{j} \varphi_\alpha dx = \int_{\hat{K}} \mathbf{j} (F_K^{-T} \hat{\varphi}_\alpha) d\hat{x} \end{aligned} \quad (3.88)$$

În condițiile în care funcțiile de formă au expresii complicate sau constantele de material și sursele variază pe element, atunci aceste integrale se calculează cu metode numerice de tip Gauss sau Simpson [118], [134]. Indiferent care este metoda numerică folosită pentru integrare, aceasta introduce erori numerice, care perturbă valoarea atât a funcționalei biliniare $a(.,.)$, cât și acelei liniare $f(.)$, din membrul drept. Pentru a simplifica prezentarea vom presupune că doar $f(.)$ este înlocuit cu o aproximare a $f_h(.)$, iar problema rezolvată devine acum $a(v_h, u_h) = f_h(u_h)$, iar relația de ortogonalitate Galerkin, fundamentală pentru metoda elementului finit nu mai este satisfăcută: $a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = f(v_h) - f_h(v_h) \neq 0$, iar caracteristicile de optimalitate ale MEF se pierd. Este motivul pentru care se spune că am comis o crimă variațională. Pentru a evalua gravitatea acestei crime, vom folosi următorul majorant al erorii [120], [64]:

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^{m-1} \|u\|_{H^m(\Omega)} + \sqrt{2}/c \sup(w_l \in V_h) |f(w_h) - f_h(w_h)| / \|w_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.89)$$

în care $m - 1$ este gradul polinomului funcțiilor de bază. Abaterile funcționalei $f(\cdot)$ este acceptabilă, doar dacă termenul al doilea, care descrie efectul acestei abateri are ordinul erorii $O(h^{m-1})$ comparabil cu ordinul primului termen. Situația în care perturbația intervine asupra funcționalei $a(\cdot, \cdot)$ se analizează în mod asemănător. O crimă variațională se comite și prin aproximarea domeniului Ω cu unul mărginit de o linie poligonală, lucru necesar pentru a aplica metoda elementului finit triunghiular de ordinul întâi. Toate aceste crime sunt acceptabile, dacă sunt luate măsurile de precauție ca eroarea introdusă să nu depășească ordinul erorii de aproximare intrinsec MEF.

Rafinarea succesivă a ordinului p dă rezultate foarte bune în cazul soluțiilor extrem de netede (care sunt funcții analitice, indefinit derivabile, funcții armonice, soluții ale ecuației Laplace, etc.), la care eroarea scade exponențial cu creșterea ordinului p . Pentru a recâștiga această proprietate în cazul problemelor cu singularități, se folosește rafinarea hp , care combină rafinarea geometrică adaptivă cu rafinarea adaptivă a ordinului. Justificarea lor se bazează pe observația că în zonele în care soluția este netedă este mai eficient să se folosească valori mari ale gradului p , iar în zonele din vecinătatea singularităților, rafinarea spațială prin micșorarea parametrului h este mai eficientă [100]. Algoritmii hp sunt super-convergenți, asigurând o scădere exponențială a erorii pe care strategiile $h-$ sau $p-$ nu o pot obține. Așa cum se vede în Fig. 3.16 problema L-shape este rezolvată prin rafinarea h cu o rată de convergență de $2/3$, prin rafinare p cu o rată de $5/4$, iar prin rafinare hp cu o convergență exponențială:

$$|u - u_N| < C e^{(-cN^\delta)}. \quad (3.90)$$

Prin rafinare $hp-$ se obțin erori relative pentru câmp de ordinul 10^{-6} , adică șase cifre semnificative corecte, cu mai puțin de 10 000 de necunoscute - grade de libertate.

În Fig. 3.17 se reprezintă principiul strategiei de rafinare hp . Alegerea alternativei optime de rafinare se face folosind o strategie bazată pe indicatori posteriori de eroare [96], [36], [31], [108]. Spre deosebire de rafinarea auto-adaptivă de tip h , în abordarea hp , pe parcursul iterațiilor, gradul p , dar și parametrul h pot să crească sau să scadă (se realizează o rafinare locală, sau dimpotrivă, o scădere a gradului p și/sau eliminarea unor noduri, care duce la creșterea lui h și obținerea unei rețele mai groasere de discretizare). În [87] sunt prezentate, studiate și comparate nu mai puțin de 13 strategii privind modul în care se aleg rafinările de tip p sau h . În Fig. 3.18 este prezentată o rețea de discretizare rezultată în urma rafinării hp , iar în fiecare element este indicat ordinul p , folosit în final.

Importanța abordării hp -FEM este ilustrată și de faptul că în prezent se dezvoltă în paralel mai multe proiecte de cercetare-dezvoltare a codurilor pentru aceasta tehnică (<http://en.wikipedia.org/wiki/HP-FEM>):

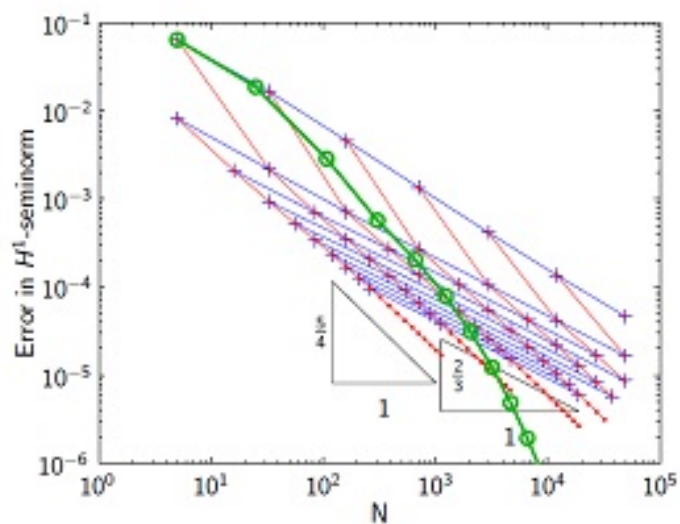


Figura 3.16: Convergența FEM cu rafinare h – (albastru, pentru diferite valori p), p – (roșu, pentru diferite valori h) și hp – (verde) [27]

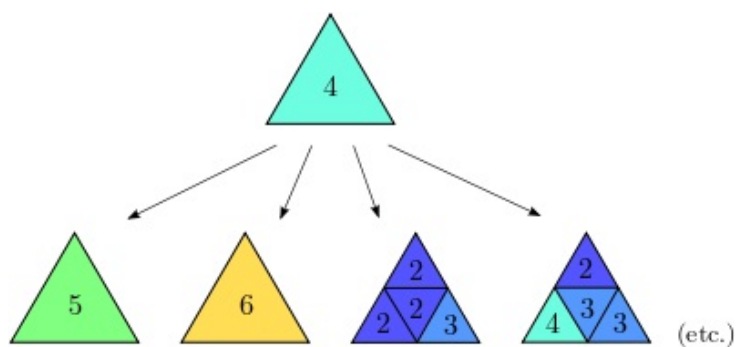


Figura 3.17: Strategia de rafinare hp (<http://hpfem.org/hermes2d/doc/src/tutorial-2.html>)

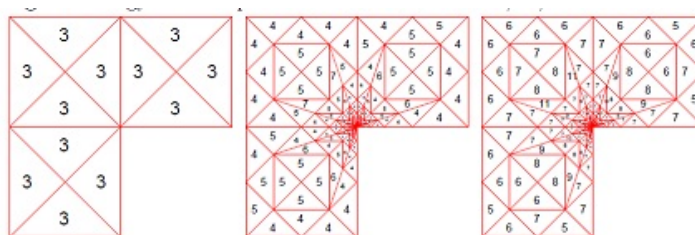


Figura 3.18: Iterațiile 0, 15 și 25 în rafinare adaptivă hp [36]

- **Concepts:** C/C++ hp-FEM/DGFEM/BEM bibliotecă de funcții dedicată rezolvării ecuațiilor de tip eliptic, dezvoltat de *SAM, ETH Zurich* (Elveția) (<http://www.concepts.math.ethz.ch/>);
- **2dhp90, 3dhp90:** coduri pentru rezolvarea ecuațiilor eliptice și a ecuațiilor lui Maxwell, dezvoltate de *L. Demkowicz la ICES, UT Austin - SUA* (<http://hpfem.org/main/links.php>);
- **PHAML:** The Parallel Hierarchical Adaptive MultiLevel Project. Software de element finit dezvoltat la *NIST (National Institute for Standards and Technology), USA*, pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale eliptice 2D pe calculatoare cu memorie distribuită și multicore, folosind rafinare adaptivă a rețelei și tehnici multigrid - (<http://math.nist.gov/phaml/>);
- **Hermes Project:** bibliotecă de funcții C/C++/Python pentru realizarea rapidă a prototipurilor de solve *hp-FEM* pentru o gamă largă de probleme multifizice staționare sau variabile, dezvoltate la *University of Nevada, Reno (USA)* și *Institute of Thermomechanics, Prague (Czech Republic)* (<http://hpfem.org/main/>);
- **PHG:** pachet de instrumente pentru dezvoltarea programelor paralele de elemente finite adaptive, $h-$, $p-$ și *hp-FEM*. PHG este dezvoltat la *State Key Laboratory of Scientific and Engineering Computing, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing of Chinese Academy of Sciences (LSEC, CAS, China)*. PHG operează cu rețele tetraedrale conforme, auto-adaptive, pe sisteme distribuite cu MPI. PHG este proiectat orientat pe obiecte, ascunzând detaliile privind paralelizarea, permițând utilizatorilor să se concentreze pe aspectele numerice, folosind concepte abstrase referitoare la rețelele de discretizare și elementele finite - (http://lsec.cc.ac.cn/phg/index_en.htm).

Următoarele proiecte și programe au sursele MATLAB disponibile pe net:

- [24] **AFEM@matlab** este un pachet MATLAB de elemente finite adaptive (AFEMs) pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale 2D staționare și evolutive. El conține coduri robuste, eficiente și ușor de urmărit pentru modulele constitutive ale unui cod de elemente finite adaptive. Aceste caracteristici sunt avantaje nu numai pentru înțelegerea metodei elementului finit, ci și pentru cercetarea și dezvoltarea ulterioară. Programul a fost realizat în spiritul "Ten digit, five seconds, and one page". Pentru o comunicare cât mai ușoară și pentru o bună educație, algoritmi principali au fost scriși într-o singură pagină, folosind structuri de date compacte și comentarii pertinente.

- [41] Colecție de rutine, pentru asamblarea, rezolvarea și estimarea erorii la elementele finite P2 (patrulare de ordinul 2). Codul are scop didactic, nu este optimizat pentru eficiență.
- [40] Calculează eroarea elementelor finite, măsurată în normele L_2 și H^1 pentru probleme 2D. Necesită MATLAB PDE Toolbox.

Programele și proiectele cu elemente finite auto-adaptive și de ordin înalt au o complexitate mult sporită față de cele prezentate în capitolul anterior, dar performanțele lor sunt mult sporite. Aceasta explică interesul pentru dezvoltarea unor baze ierarhice cu proprietăți cât mai bune. În perspectivă, devine tot mai evident faptul că alegerea tipului de element finit pentru o aplicație particulară avansată tinde să devină o problemă relativ dificilă, pentru rezolvarea căreia nici măcar nu este necesar un efort de programare, ci unul de înțelegere a unor subtilități matematice de nivel tot mai înalt.

3.5 Probleme de câmpul staționar în medii neliniare

Ecuțiile lui Maxwell sunt liniare, dar această caracteristică fundamentală este pierdută, dacă adăugăm la ele ecuațiile constitutive ale materialelor dielectrice, conductoare sau magnetice neliniare. Dintre acestea, primele cu care s-au confruntat inginerii interesați în dispozitive electromagnetice au fost materialele fero-magnetice, folosite în construcția mașinilor și aparatelor electrice. Relația dintre inducția și intensitatea câmpului magnetic, descrisă de caracteristica de magnetizare este în cazul acestor materiale una neliniară, prezentând fenomenul de saturație sau cel de histerezis. Ceva mai târziu au început să prezinte un mare interes joncțiunile din dispozitivele semiconductoare, care au o caracteristică de conducție puternic neliniară. S-au pus astfel bazele unei noi direcții de cercetare, și chiar a unei noi discipline, cea de *modelare și simulare numerică a dispozitivelor semiconductoare* [Vasileșka 08], a cărei interacțiune cu modelarea electromagnetică este reprezentată schematic în (Fig. 3.19). Ce este specific acestei discipline este mai ales modelarea fenomenelor de transport a purtătorilor de sarcină, care poate fi făcută clasic, semi-clasic sau cuantic (Fig. 3.20). Trebuie remarcat că această disciplină are un puternic caracter multifizic, în modelare intervenind nu numai ecuațiile de transport ci și cele electromagnetice și de multe ori și cele termice [Holst01], [Holst03]. În Fig. 3.21 și fig. 3.22 sunt prezentate câteva imagini reprezentative pentru rezultatele privind simularea dispozitivelor semiconductoare. Acest subiect excede nivelul prezentului document.

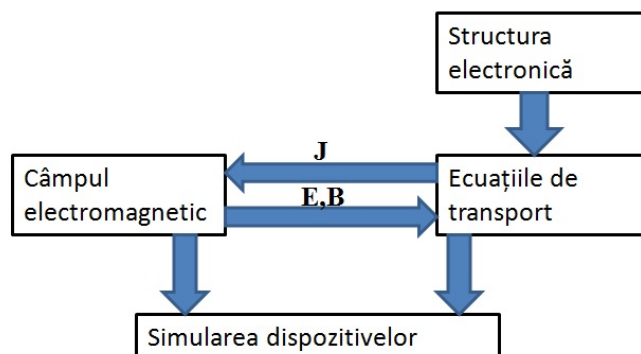


Figura 3.19: Descrierea schematica a simulării dispozitivelor semiconductoare [Vasileska 08]

MODEL	ÎMBUNĂTĂȚIRI
Modele compacte	
Ecuții de Difuzie-Drift	Bun pentru dispozitive mai mici de $0.5\mu\text{m}$, inclusiv $\mu(E)$
Ecuții hidrodinamice	
Ecuția de transport Boltzmann Metode Monte Carlo/CA	
Hidrodinamici cuantice	
Metode cuantice Monte Carlo/CA	
Ecuția cuanto-cinetică (Liouville, Wigner-Boltzmann)	
Metoda funcțiilor Green	Include corelații în ambele domenii: spațial și temporal
Soluția directă a n-body Ecuția Schrödinger	Poate fi rezolvată numai pentru un nr. mic de particule

Figura 3.20: Ilustrarea ierarhiei modelelor de transport [Vasileska 08]

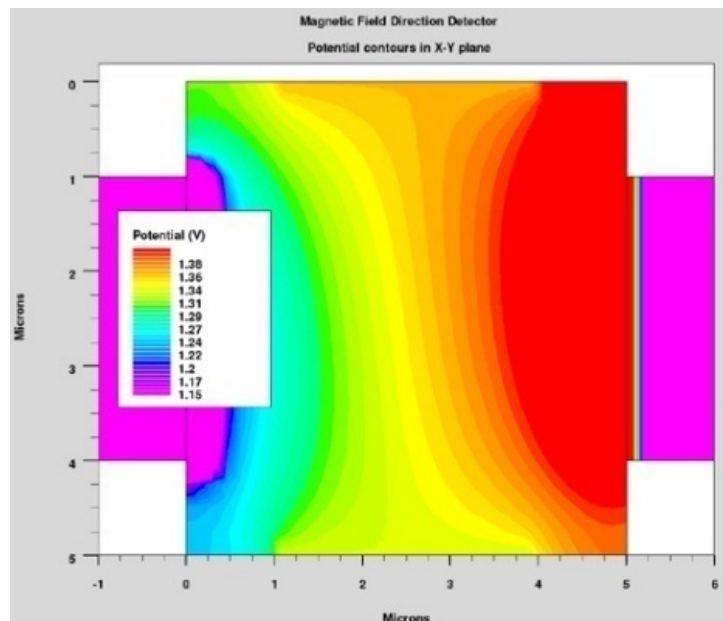


Figura 3.21: Rezultatele simulării unui senzor Hall semiconductor (http://www.silvaco.com/products/vwf/atlas/3D/magnetic3D/magnetic3D_br.html)

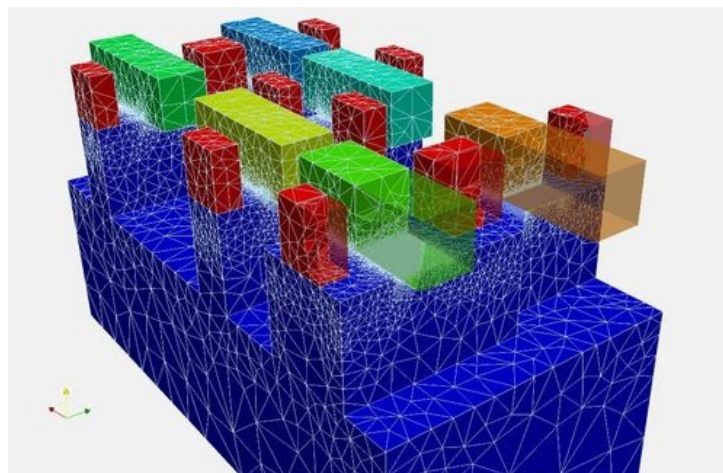


Figura 3.22: Retea de discretizare cu elemente finite a unui dispozitiv semiconductor [microport.com.tw]

3.5.1 Probleme cu caracteristica de magnetizare neliniară

Subiectul de interes este modelarea câmpului magnetic în medii cu caracteristica de magnetizare neliniară. Folosirea elementelor finite pentru modelarea mașinilor

electrice, considerând neliniaritatea magnetică a fost subiectul unei teze cu caracter de pionierat în acest domeniu, încă din anii 70 [66], dar și a unei serii de cărți și articole, dintre care menționăm [112], [106], [19], [11], [114]. Progresul este ilustrat de diferența dintre teza din 1970 și o teză de doctorat recentă [23], dar și de articole recente, din același domeniu [84], [117], [57], [42]. Acest progres ca și cel realizat în modelarea dispozitivelor semiconductoare are mai multe aspecte:

- cunoștințele de fizică, în special cele care se referă la modelarea materialelor neliniare, mergând până la modelele microscopice, semi-clasice sau cuantice (cum este descrierea dinamicii de magnetizare prin ecuația LLG);
- cunoștințe de matematici aplicate și metode numerice, care au pus bazele unor teorii complexe și consistente, ce stau la baza algoritmilor numerici și care evidențiază posibilitățile dar și limitele fiecărei abordări noi;
- dezvoltările tehnologiei informației, atât din punct de vedere hardware (legea lui Moore (http://en.wikipedia.org/wiki/Moore's_law) care, a dus la creșterea exponențială atât a capacității de memorare, cât și a vitezei de calcul, performanțele sistemelor de calcul crescând fenomenal, la un nivel de neimaginat), cât și din punct de vedere software, prin descoperirea unor algoritmi fundamentali de mare eficiență [34], care au dus la o creștere a vitezei de calcul mult mai mare decât cea descrisă de legea lui Moore (pana la de 25 de ori mai mult, conform [75] [129]).

Din punctul de vedere al materialelor feromagnetice moi sau dure, modelele lor computaționale neliniare se clasifică în:

- modele **izotrope neliniare**, la care $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sunt coliniare, caracteristica de magnetizare fiind descrisă de o funcție definită pe semi-axa reală: $B = f(H)$, cu $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, care exprimă relația dintre modulele celor doi vectori $\mathbf{H}$ și $\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H}$, cu $\mu = 1/\nu = f(H)/H$;
- modele **neliniare anizotrope**, descrise de caracteristica vectorial de magnetizare $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$, cu $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- modele **dinamice de magnetizare neliniară**, în care între $\mathbf{B}(t) : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\mathbf{H}(t) : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ intervine un operator integro-diferențial, consecință a ecuației diferențiale neliniare $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{B}, \mathbf{H})$;
- modele de **histerezis**, descrise de relația neliniară $B = F(H)$, în care de această dată $F : \mathbb{R}^3 \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times (t_{\min}, t_{\max})$ este un operator,

care face să corespundă unui semnal ce descrie variația în timp a intensității câmpului magnetic un alt semnal de ieșire, ce descrie variația în timp a inducției magnetice.

Cel mai simplu model neliniar este cel afin: $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) = \bar{\mu}\mathbf{H} + \mathbf{B}_r$, definit de tensorul permeabilităților $\bar{\mu}$ și de inducția remanentă (sau echivalent de magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r/\mu_0$). Acest model util în caracterizarea materialelor magnetice dure (magneților permanenți) poate fi scos din această discuție, deoarece, așa după cum s-a văzut anterior, el generează ecuații liniare pentru câmpul magnetic, în care $\mathbf{B}_r$ este sursa de câmp.

Modelarea fenomenului de histerezis este un domeniu științific complex, care s-a dezvoltat mult în ultima perioadă (<http://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>). Dintre modelele de histerezis, cel care oferă o precizie acceptabilă pentru multe dintre aplicațiile actuale este modelul Preisach (http://en.wikipedia.org/wiki/Preisach_model_of_hysteresis), dar există și modele mai simple, la care precizia totuși are de suferit.

Pentru început vom considera cazul mai simplu al problemei analizei câmpului. În condiții destul de largi pentru caracteristica de magnetizare $B = f(H)$, deci implicit pentru permeabilitatea statică $\mu(H) = B/H$ sau pentru reluctivitatea magnetică $\nu(B) = 1/\mu = H/B$, multe din ecuațiile și relațiile din cazul liniar se mențin valabile și în cazul neliniar, cu modificări minore.

Ecuațiile fundamentale ale regimului magneto-staționar au în acest caz forma locală:

- Teorema Gauss: $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla\mathbf{B} = 0$;
- Teorema lui Ampere: $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$;
- Ecuația constitutivă: $\mathbf{B} = \mu(|\mathbf{H}|)\mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \nu(|\mathbf{B}|)\mathbf{B}$.

Caracterul solenoidal al inducției magnetice permite definirea potențialului magnetic vector:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (3.91)$$

care vom presupune că satisface condiția de etalonare a lui Coulomb:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (3.92)$$

În consecință ecuația de ordinul doi satisfăcută de acest potențial este:

$$\operatorname{rot}(\nu(|\mathbf{B}|)\operatorname{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J} \Leftrightarrow \nabla(\nu(|\nabla \times \mathbf{A}|)\nabla\mathbf{A}) = \mathbf{J}, \quad (3.93)$$

în care atât reluctivitatea $\nu = f(B, \mathbf{r})$ cât și densitatea de curent $\mathbf{J} = g(\mathbf{r})$ sunt descrise de funcții cunoscute, pentru orice punct din domeniul de calcul $\mathbf{r} \in \Omega$.

De regulă, domeniul Ω este alcătuit dintr-un număr finit de subdomenii omogene Ω_i , $i = 1 : n$, în fiecare dintre acestea, caracteristica de magnetizare deci implicit și reluctivitatea $\nu = f_i(\mathbf{B})$ sunt independente de punctul $\mathbf{r} \in \Omega_i$. La ecuațiile satisfăcute de câmp se adaugă următoarele condiții de frontieră nule:

- $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$;
- $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_H$,

dar care pot fi și două funcții nenule $b : S_B \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : S_H \rightarrow \mathbb{R}^2$, definite pe cele două suprafețe S_B și S_H , care alcătuiesc o partiție disjunctă a frontierei $\Sigma = \partial\Omega = S_B \cup S_H$. Aceste condiții de frontieră se exprimă în termeni de potențial astfel:

- $(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$;
- $\nabla A(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_H$.

Prima condiție se înlocuiește de regulă cu una aparent mai tare:

- $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$,

dar se demonstrează că în condiții destul de largi cele două condiții sunt echivalente [23].

Funcția care generează neliniaritatea este caracteristica de magnetizare $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ cu $B = f(H)$, o funcție care îndeplinește următoarele condiții:

- f este continuă și derivabilă cu $\mu_0 \leq f'(s) < \infty$ pe întregul domeniu de definiție $s > 0$;
- f are valoarea $f(0) = 0$;
- derivata sa $f'(s) \rightarrow \mu_0$, atunci când $s \rightarrow \infty$.

În consecință, această funcție are următoarele proprietăți [23]:

- este puternic monoton crescătoare:

$$(f(s) - f(t))(s - t) \leq \mu_0(s - t), \quad \forall s, t > 0; \quad (3.94)$$

- derivata sa f' este continuă și mărginită inferior și superior

$$\mu_0 \leq f'(s) < L < \infty, \quad \forall s > 0; \quad (3.95)$$

- f este lipschitziana cu constanta L ;

- f este bijectivă și deci $\exists f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, cu $H = f^{-1}(B)$;
- derivata inversei f^{-1} este continuă și marginită inferior și superior

$$m = 1/L \leq f^{-1'}(s) \leq \nu_0 = 1/\mu_0 < \infty, \forall s > 0; \quad (3.96)$$

- $\nu(s) = f^{-1}(s)/s$ este bine definită, este continuă și marginită

$$m \leq \nu(s) \leq \nu_0, \forall s > 0; \quad (3.97)$$

- $\nu(\cdot)$ este pe $\mathbb{R}^+$ o funcție puternic monoton crescătoare, cu constanta de monotonie m și lipschitziană, cu constanta ν_0 .

3.5.2 Probleme magnetostaționare plan-paralele

Să considerăm acum cazul particular al problemelor magnetostaționare plan-paralele 2D, cu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, în care densitatea de curent $\mathbf{J}$ este orientată axial, și în consecință, potențialul magnetic vector $\mathbf{A} = \mathbf{k}A(x, y)$ va avea și el componente trasversale nule, iar ecuațiile regimului capătă forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, y) &= \mathbf{i}B_x(x, y) + \mathbf{j}B_y(x, y) = \text{rot}\mathbf{A}(x, y) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial A}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial A}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y) = \text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (3.99)$$

Pentru a simplifica scrierea, am notat aici cu $A(x, y)$ și cu $J(x, y)$ componenta axială (după axa Oz) a potențialului vector și respectiv a densității de curent. Între aceste două funcții scalare există relația:

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial(\nu B_y)}{\partial x} - \\ &- \frac{\partial(\nu B_x)}{\partial y} = -\frac{\partial(\nu \partial A / \partial x)}{\partial y} - \frac{\partial(\nu \partial A / \partial y)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.100)$$

care este de fapt o ecuație Poisson generalizată scalară:

$$-\text{div} [\nu(|\text{grad } A|) \text{ grad } A] = J, \quad (3.101)$$

deoarece $B = |\mathbf{B}| = |\text{rot} \mathbf{A}| = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2} = |\text{grad } \mathbf{A}|$.

Condițiile pe frontiera pe $\Gamma = \partial\Omega = C_B \cup C_H$ capătă forma simplificată:

- $A(\mathbf{r}) = 0$ pentru $\mathbf{r} \in C_B$, adică o condiție Dirichlet nulă și
- $\frac{dA(\mathbf{r})}{dn} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in C_H$, adică o condiție Neumann nulă.

Pentru a aduce această problemă la o formă variațională, vom considera spațiul Sobolev $V_0 = \{u \in H^1(\Omega), u(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in C_B \text{ cu } C_B \text{ de măsură nenulă}\}$, cu produsul scalar $(u, v)_{V_0} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dS$ și cu norma energetică indusă de acesta: $|u|^2 = (u, u)_{V_0}$.

Multiplicând ecuația (3.101) cu o funcție arbitrară din V_0 și integrând pe Ω , rezultă:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla [\nu(|\nabla u|) \nabla u] v d\mathbf{x} &= \\ &= \int_{\Omega} \nabla \nu(|\nabla u|) \nabla u \nabla v d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \nabla \nu(|\nabla u|) (\nabla u \cdot \mathbf{n}) v dS_x, \end{aligned} \quad (3.102)$$

în care $d\mathbf{x} = dS$ este elementul de arie al domeniului plan Ω .

Deoarece $v = 0$ pe C_B și $du/dn = 0$ pe C_H , rezultă că integrala de pe frontieră se anulează și problema are următoarea formulare slabă, obținută prin anularea proiecției Galerkin a reziduului pe spațiul V_0 : caută $u \in V_0$: $a(u, v) = f(v)$, $\forall v \in V_0$,
,
cu

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nu(|\nabla u|) \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad (3.103)$$

și

$$f(v) := \int_{\Omega} J v d\mathbf{x}. \quad (3.104)$$

Această problemă este bine formulată, adică are soluție, aceasta este unică și depinde continuu de J , conform *teoremei lui Zarantonello*, cunoscută și sub numele de *extensia neliniară a teoremei Lax-Millgram*, care are următorul enunț:

Fie V un spațiu Hilbert, $F \in V^*$, dualului său și $A : V \rightarrow V^*$ un operator neliniar care îndeplinește condițiile:

- A este *puternic monoton*: $\exists C > 0$ a.î. $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq C \|u - v\|_V$, $\forall u, v \in V$,
- A este *lipschitzian*: $\exists c > 0$ a.î. $\|A(u) - A(v)\|_{V^*} \leq c \|u - v\|_V$, $\forall u, v \in V$,
aunci ecuația operațională $A(u) = F$ are soluție unică $u^* \in V$.

În cazul nostru, operatorul $A : V \rightarrow V^*$ este definit de $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ și funcționala F de $\langle F, v \rangle = f(v)$.

Demonstrația acestei teoreme este constructivă și se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach [23]. Cele două condiții impuse operatorului A sunt îndeplinite, datorită proprietăților caracteristice de magnetizare ν (se demonstrează că cele două constante au valorile $C = m = 1/L$ și $c = 3\nu_0$).

S-a arătat în medii liniare, că orice problemă variațională eliptică, simetrică este echivalentă cu una de minimizare. Această afirmație se poate extinde și în cazul nostru neliniar, dacă vom considera funcționala de energie, ce trebuie minimizată ca fiind definită de relația:

$$J(v) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla v|) \, d\mathbf{x} - \langle F, v \rangle, \quad (3.105)$$

în care funcția $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ este definită de

$$\varphi(s) = \int_0^s \nu(t) t \, dt. \quad (3.106)$$

Remarcăm că valoarea funcției φ pentru un câmp magnetic de inducție B este egală cu densitatea de volum a energiei sale magnetice:

$$\varphi(B) = \int_0^B \nu(b) b \, db = \int_0^B f(b) \, db. \quad (3.107)$$

În aceste condiții, derivata Fréchet a funcționalei

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\int_0^{|\nabla v|} f(b) \, db - Jv \right) \, d\mathbf{r} \quad (3.108)$$

este $J'(v) = A(v) - F$ și se anulează pentru soluția ecuației $A(v) = F$. Mai mult, dubla derivată $J''(v) = A'(v)$ este un operator liniar pozitiv definit, pentru $\forall v \in V_0$, deci funcționala J este convexă și minimumul său este un minim global în V_0 .

Acum avem pregătite toate condițiile pentru a putea ataca rezolvarea numerică a problemei cu metoda elementului finit. Pentru aceasta vom utiliza un subspațiu finit dimensional $V_h \subset V_0$, subspațiu generat de funcțiile de bază nodale φ cu $i = 1 \dots N_h$, asociate unei triangulații $\mathcal{T}_h$ a domeniului Ω . Problema discretă se formulează astfel: caută u_h în V_h astfel încât: $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

În cazul elementelor finite conforme, buna formulare este moștenită de la problema continuă, în consecință și problema discretă are soluție și aceasta este unică. Ramâne să mai demonstrăm, în baza unei teoreme de convergență, că această soluție numerică tinde către soluția exactă, atunci când norma triangulației $h \rightarrow 0$.

În realitate, și de această dată funcționale $a(., .)$ și $f(.)$ nu se calculează exact, ci doar aproximativ, folosind formule de cuadratură numerică:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h} \phi = \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{N_T} \omega_{T_i} \phi(z_{T_i}) \cong \int_{\Omega} \phi(x) dx, \quad (3.109)$$

în care ϕ este funcția de integrat, z_{T_i} sunt puncte din interiorul elementului T_i iar ω_{T_i} sunt ponderile specifice metodei de integrare numerică folosită, care indiferent de metodă satisfac condiția:

$$\sum_{i=1}^{N_T} \omega_{T_i} = \text{meas} T. \quad (3.110)$$

Formula de cuadratură este exactă nu numai pentru $\phi = 1$ ci și pentru polinoamele de grad $2k_T - 2$:

$$\int_{\Omega} \phi d\mathbf{x} = \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h}[\phi] \quad (3.111)$$

pentru

$$\phi|_T \in \mathcal{P}_{2k_T-2}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.112)$$

În realitate, datorită cuadraturii numerice, se rezolvă problema aproximativă: cauă

$$u_h \in V_h \text{ a.î. } a_h(u_h, v_h) = \langle F_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.113)$$

în care

$$\langle F_h, v_h \rangle \cong \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h}[f \cdot v_h] \cong \int_{\Omega} f \cdot v_h d\mathbf{x} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &\cong \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h}[\tilde{\nu}(|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot \nabla v_h] \cong \\ &\cong \int_{\Omega} \tilde{\nu}(|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Conform lemei lui Strang pentru probleme neliniare, în condițiile teoremei lui Zarantonello, eroarea soluției problemei discrete aproximative are eroarea [23]:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_h^*\|_V &\leq \inf_{v_h \in V_h} \left[\left(1 + \frac{L}{m} \right) \|u^* - v_h\|_{V_h} \right] + \\ &+ \frac{1}{m} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{V_h}} + \\ &+ \frac{1}{m} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\langle F - F_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_{V_h}}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

care în cazul problemei magnetostaționare neliniare are expresia:

$$\begin{aligned} & \|u^* - u_h^*\|_{V_0} \leq \\ & \leq \inf_{v_h \in V_h} \left[\left(1 + \frac{3\nu_0}{\tilde{m}_\nu} \right) \|u^* - v_h\|_{V_h} + \frac{1}{\tilde{m}_\nu} \sup_{s \geq 0} |\nu(s) - \tilde{\nu}(s)| \|v_h\|_{V_h} \right], \end{aligned} \quad (3.117)$$

în care $\tilde{\nu}(s)$ este aproximarea numerică a lui $\nu(s)$.

Eroarea pe care o are proiecția soluției exacte pe spațiul V_h este

$$\left\| u^* - \prod_h u^* \right\|_1 \leq \tilde{C} h^\alpha \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u^*|_{1+\alpha, T}^2 \right)^{1/2} \quad (3.118)$$

în care $1 + \alpha$ este gradul minim al polinoamelor funcții de bază pentru elementele finite. Această relație demonstrează convergența soluției numerice către cea exactă, atunci când $h \rightarrow 0$.

Teoria prezentată poate fi extinsă la cazul 3D, pentru rezolvarea problemelor tridimensionale de regim magnetic staționar în medii neliniare, numai că în acest caz trebuie folosite elementele de muchie pentru a caracteriza operatorul de derivare spațială *rot-rot*.

Pentru a înțelege principiul rezolvării numerice a acestei probleme ar mai trebui discutat modul în care se rezolvă **sistemul neliniar de ecuații algebrice**

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad (3.119)$$

în care u_h și $v_h = \sum_{i=1}^N N_i \phi_i(x)$, cu ϕ_i funcțiile de bază și N_i gradele de libertate ale problemei.

Doua sunt metodele cele mai des întâlnite în practică pentru rezolvare a acestui sistem algebric neliniar:

- metoda punctului fix, [78];
- metod Newton [66], [117].

Ambele sunt metode iterative, prima cere un efort mai mic de calcul la fiecare iterație, dar este în principiu mai lent convergentă, în timp ce a doua metodă este mai rapid convergentă, dar necesită la fiecare iterație calculul matricei jacobian a sistemului de ecuații neliniare ce este rezolvat. Din păcate, chiar dacă este mai rapid convergentă, metoda Newton nu este garantat convergentă, decât în condițiile în care inițializarea este suficient de aproape de soluția finală a sistemului neliniar. Metoda punctului fix, chiar dacă este lent convergentă, are avantajul că iterațiile ei sunt garantat convergente, în condiții destul de largi. Un alt avantaj major al

metodei punctului fix constă în faptul că se poate aplica materialelor cu histerezis magnetic, în timp ce metoda Newton nu este potrivită pentru astfel de materiale. În literatura se întâlnesc mai multe amendamente aplicate acestor metode sau combinației lor [78], de exemplu, se recomandă folosirea suprarelaxării pentru a accelera metoda punctului fix, folosirea subrelaxării pentru a obține convergența metodei Newton, evaluarea aproximativă sau sporadică (nu la toate iterațiile) a matricei jacobian, pentru a reduce efortul de calcul pe iterație, cerut de metoda Newton [66] și încă multe altele. Una dintre aceste tehnici de robustificare a soluționării problemelor puternic neliniare de mari dimensiuni este cea a abordării pseudo-tranzitorii, în care problemele staționare neliniare se rezolvă prin simulare tranzitorie fictivă, către starea finală staționară.

3.5.3 Metoda punctului fix al polarizației

Descompune ecuația constitutivă în doi termeni:

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) = \mu\mathbf{H} + \mathbf{I}(\mathbf{H}) \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{B} - \mu\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}) = \mathbf{f}_B(\mathbf{B}) \quad (3.120)$$

unul liniar caracterizat de permeabilitatea "de calcul" μ și altul neliniar, descris de polarizația magnetică $\mathbf{I} = \mathbf{f}_B(\mathbf{B})$. Acesta este motivul pentru care această metodă de rezolvare iterativă se mai numește și metoda de punct fix a polarizației, sau pe scurt metoda polarizației. Metoda se bazează pe teorema punctului fix al lui Banach (http://en.wikipedia.org/wiki/Banach_fixed-point_theorem), conform căreia ecuația de punct fix $x = F(x)$ are soluție și aceasta este unică, în condițiile în care aplicația $F : X \rightarrow X$, definită pe spațiul Banach X cu distanța $d(.,.)$ este o contracție, adică îndeplinește condiția:

$$d(F(x), F(y)) \leq qd(x, y), \text{ cu } q < 1, \forall x, y \in X. \quad (3.121)$$

În spațiile normate condiția (3.121) devine $\|F(x) - F(y)\| \leq q\|x - y\|$, aplicația F trebuie să fie lifschitziană, cu constanta subunitară. Soluția ecuației de punct fix este limita șirului

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \dots, x_{k+1} = F(x_k), \dots \longrightarrow x^*, \quad (3.122)$$

în care distanța dintre doi termeni succesivi:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq qd(x_k, x_{k-1}) \leq q^{k+1}d(x_1, x_0), \quad (3.123)$$

ține către zero, iar limita x^* satisface ecuația $x^* = F(x^*)$. Rata de convergență a procedurii iterative este dată de relația: $d(F(x_k), F(x^*)) \leq d(x_1, x_0)q^k/(1 - q)$. Cu cât constanta q este mai mică, cu atât șirul de iterații este mai rapid convergent. Pentru a construi soluția problemei de câmp în acest fel, ar trebui ca ecuațiile

câmpului să fie aduse sub forma unor ecuații de punct fix, cu operatorul F o contracție. Procedul iterativ corespunde rezolvării succesive a unor probleme liniare, fictive de câmp, în care constanta de material nu se modifică și are valoarea μ "de calcul", iar sursele sunt, pe lângă cele reale și polarizația magnetică care are distribuția $\mathbf{I}_k(\mathbf{B}_k)$, calculată la fiecare iterație, în funcție de inducția magnetică generată de polarizația magnetică de la iterația anterioară. Metoda punctului fix al polarizației pornește de la o distribuție arbitrară a polarizației $\mathbf{I}_0$ și parcurge etapele:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &\rightarrow \mathbf{B}_1 = FEM(\mathbf{I}_0) \rightarrow \mathbf{I}_1 = \mathbf{f}_B(\mathbf{B}_1) = \\ &= \mathbf{B}_1 - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}_2 = FEM(\mathbf{I}_1) \rightarrow \mathbf{I}_2 \dots \end{aligned} \quad (3.124)$$

în care s-a notat cu $FEM(\mathbf{I})$ soluția problemei de câmp magnetic staționar calculată cu FEM sau cu orice altă metodă numerică sau analitică, iar cu $\mathbf{f}^{-1}(\cdot)$ caracteristica de magnetizare $\mathbf{H} - \mathbf{B}$ a mediului neliniar. Iterațiile se opresc, atunci când variația relativă a polarizației: $\varepsilon = \|\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_{n+1}\| / \|\mathbf{I}_n + \mathbf{I}_{n+1}\|$ are valori acceptabil de mici.

În general, la iterația k : $\mathbf{I}_k = \mathbf{B}_k - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}_k) = FEM(\mathbf{I}_{k-1}) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\mathbf{I}_{k-1}))$, care la limită tinde către ecuația de punct fix: $\mathbf{I} = FEM(\mathbf{I}) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\mathbf{I}))$, în care operatorul $F(\cdot) = FEM(\cdot) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\cdot)) = \mathbf{F}_B(FEM(\cdot)) = \mathbf{F}_B(\cdot) \circ FEM(\cdot)$ este obținut prin compunerea a două aplicații, una neliniară $\mathbf{I} = \mathbf{F}_B(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})$, care presupune trecerea prin caracteristica inversă de magnetizare, în vederea calculării polarizației magnetice în funcție de inducția magnetică ("intrarea" se face prin B) și alta liniară $\mathbf{B} = FEM(\mathbf{I})$, care presupune rezolvarea ecuațiilor câmpului magnetic staționar, în mediul virtual cu permeabilitatea μ , și care are polarizația magnetică $\mathbf{I}$, sursa de câmp.

Aplicația $\mathbf{F}_B$ este o contracție: $\|\mathbf{F}_B(\mathbf{B}') - \mathbf{F}_B(\mathbf{B}'')\| \leq q \|\mathbf{B}' - \mathbf{B}''\|$, $\forall \mathbf{B}', \mathbf{B}'' \in (L^2(\Omega))^3$, cu $q = 1 - \mu_0 / \mu_{\max}$, dacă permeabilitatea de calcul este aleasă astfel încât $0 < \mu < 2\mu_{\max}$, în care $\mu_{\max}$ este permeabilitatea dinamică maximă, adică valoarea maximă a derivatei funcției $B = f(H)$, pentru $H > 0$

[56]. Valoarea optimă a permeabilității de calcul este $\mu_{\text{opt}} = 2\mu_{\min} \cdot \mu_{\max} / (\mu_{\min} + \mu_{\max})$, în care $\mu_{\min} = \mu_0$ este permeabilitatea dinamică minimă. Cum și aplicația $FEM(\cdot)$ este neexpansivă în spațiul $L^2(\Omega)$, rezultă că procedura de punct fix al polarizației este convergentă către soluția exactă a problemei de câmp [78].

Avantajele metodei punctului fix al polarizației sunt următoarele:

- metoda este robustă, deoarece ea este convergentă pentru orice caracteristică de magnetizare strict monotonă și lipschitziană, chiar și dacă aceasta are puncte de inflexiune;
- nu sunt necesare calcule preliminare pentru a alege punctul de start, deoarece metoda este convergentă, pentru orice inițializare;

- la fiecare iterație se rezolvă o problemă liniară de câmp, în care se modifică doar sursele, nu și caracteristica mediului, ceea ce face ca matricea de rigiditate, calculată inițial să rămână neschimbată pe parcursul iterațiilor;
- nu sunt impuse restricții sau condiții suplimentare caracteristicii de magnetizare, în consecință, aceasta poate fi aproximată liniar pe porțiuni.

Metoda trebuie aplicată cu grijă, pentru a îndeplini condițiile de convergență. De exemplu, aproximări nemonotone ale caracteristicii de magnetizare (cum sunt polinomiale cu efect Runge), sau intrarea în caracteristica de magnetizare prin $\mathbf{H}$ în loc de $\mathbf{B}$, respectiv rezolvarea problemei liniare de câmp cu erori, care fac algoritmul expansiv, pot duce la scăderea vitezei de convergență, sau și mai grav, la pierderea totală a convergenței.

Rezolvarea la fiecare iterație de punct fix a problemei de câmp cu metoda elementelor finite, nici măcar nu necesită dezvoltări teoretice pentru ecuații neliniare, deoarece, de fapt, se rezolvă o problema liniară, virtuală, cu permeabilitate "de calcul" constantă, cu valoarea optimă μ_{opt} . Singurul dezavantaj al acestei metode este convergența sa lentă. În compensație, efortul de calcul la fiecare iterație este relativ mic, astfel încât performanța metodei nu trebuie judecată după numărul de iterații ci după efortul de calcul necesar atingerii unei soluții acceptabile.

3.5.4 Metoda iterativă Newton

Metoda Newton urmărește realizarea unei rate de convergență sporită (pătratică în vecinătatea soluției). Pornind de la relațiile obținute prin proiecție:

$$\int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v_i d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(u) v_i d\mathbf{x}, \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.125)$$

în care $a(u) = \nu(|\nabla u|)$, iar

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N y_j v_j \quad (3.126)$$

se exprimă în funcție de componentele vectorului gradelor de libertate: $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ rezultă sistemul de ecuații neliniare:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0, \quad (3.127)$$

în care

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \quad (3.128)$$

cu

$$f_i(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v_i - f(u) v_i d\mathbf{x}. \quad (3.129)$$

Matricea jacobian $\mathbf{J}$ a acestui sistem de funcții are elementele:

$$J_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_j} \nabla u + a(u) \frac{\partial \nabla u}{\partial y_j} \right] \cdot \nabla v_i - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_j} v_i d\mathbf{x} \quad (3.130)$$

în care

$$\frac{\partial u}{\partial y_j} = v_j; \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \nabla u}{\partial y_j} = \nabla v_j. \quad (3.132)$$

În consecință, matricea $\mathbf{J}$ are aceeași structură de raritate ca matricea de rigiditate din cazul liniar.

Să presupunem că au fost calculate elementele matricei jacobian, iterațiile specifice metodei Newton se fac după relațiile (http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method), [117]:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{y}_n) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (3.133)$$

În realitate, nu se inversează matricea jacobian, ci la fiecare iterație se rezolvă sistemul liniar:

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}_n) \delta \mathbf{y}_{n+1} = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (3.134)$$

și se efectuează pasul $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \delta \mathbf{y}_{n+1}$. Iterațiile continuă până când vectorul rezidului $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$ are norma suficient de mică. Principalele deosebiri care apar în implementarea metodei Newton, față de cazul liniar constau în:

- la asamblarea matricei de rigiditate, se ține cont de soluția de la iterația anterioară și de permeabilitatea dinamică a mediului magnetic neliniar din element;
- termenul liber ține cont și el de soluția de la iterația anterioară;
- calculele se reiau iterativ, până când corecția $\delta \mathbf{y}_{n+1}$ sau reziduul $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$ au norma neglijabilă.

În cazul liniar $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{y})\mathbf{y} - \mathbf{b}$, cu $\mathbf{S} = \mathbf{J}(\mathbf{y})$ matricea constantă de rigiditate și $\mathbf{b}$ vectorul surselor. Sistemul rezolvat la iterațiile Newton devine: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{y}_n)\mathbf{y}_n - \mathbf{J}(\mathbf{y}_n)\mathbf{y}_n + \mathbf{b} = \mathbf{b}$, deci metoda Newton converge în cazul liniar într-o singură iterație.

Asamblarea matricei de rigiditate liniarizate poate fi simplificată, dacă se consideră că ν depinde de B^2 și nu de B [6]. În [23] se arată că operatorul Newton $A' : V_0 \rightarrow V^*$, definit de derivata Frechet a operatorului nelinar (reprezentat în cazul discretizat prin matricea jacobian):

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nu (|\nabla u|) \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (3.135)$$

este coerciv și mărginit cu constantele:

$$\begin{aligned} \langle A'(u), v \rangle &\geq m_{\nu} \|v\|_{V_0}^2, \forall u, v, w \in V_0 \\ |\langle A'(u), v \rangle| &\leq 3\nu_0 \|v\|_{V_0} \|w\|_{V_0} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Cu aceste notații, iterațiile Newton pentru rezolvarea sistemului nelinar $A(u) = f$ au forma:

$$u^{k+1} = u^k [A'(u^k)]^{-1} (A(u^k) - f) \quad (3.137)$$

în care elementele matricei jacobian, de rigiditate dinamică se calculează cu:

$$\begin{aligned} a'(u; w, v) &= \langle A'(u) w, v \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \nu (|\nabla u|) \nabla w \cdot \nabla v + \frac{\nu' (|\nabla u|)}{|\nabla u|} (\nabla u \cdot \nabla w) (\nabla u \cdot \nabla v) dx, \quad (3.138) \\ u &\in V_0, \text{ pentru } \nabla u \neq 0, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} a'(u; w, v) &= \langle A'(u) w, v \rangle = \int_{\Omega} \nu(0) \nabla w \cdot \nabla v dx, \quad (3.139) \\ u &\in V_0, \text{ pentru } \nabla u = 0. \end{aligned}$$

Condițiile de convergență ale metodei Newton sunt discutate în [23]. În vecinătatea soluției, metoda Newton are convergență pătratică. În Fig. 3.23 se reprezintă modul în care converg cele două metode în rezolvarea problemei de test TEAM Nr.10 (Fig. 3.24), 3D, neliniară de regim magneto-staționar, dar așa cum am precizat anterior astfel de comparații nu au relevanță prea mare, pentru că nu evidențiază timpul de calcul.

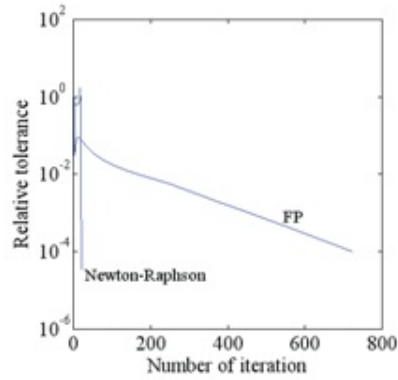


Figura 3.23: Convergența metodelor Newton și a punctului fix [78]

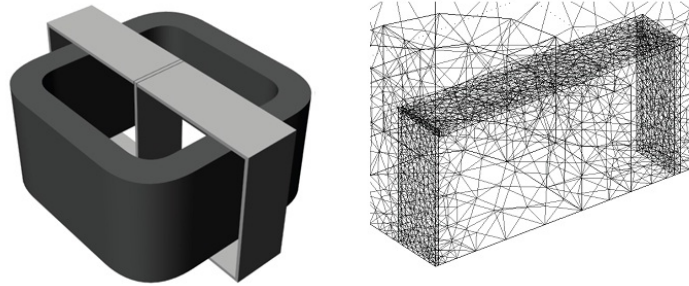


Figura 3.24: Problema de test TEAM 10 și rețeaua ei de discretizare cu MEF [78]

În această problemă s-au rezolvat ecuațiile de ordinul întâi ale regimului:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I}, \quad (3.140)$$

cu condițiile de frontieră:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \times \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_H \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_B \end{aligned} \quad (3.141)$$

Acestea au fost rescrise în funcție de potențialul magnetic vector astfel:

$$\nabla \times [\nu \nabla \times \mathbf{A}] = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I} \quad (3.142)$$

cu condițiile de frontieră

$$\begin{aligned} [\nu \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{I}] \times \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_H \\ \mathbf{n} \times \mathbf{A} &= 0, \quad \text{pe } S_B. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Adaugarea condiției de etalonare Coulomb pentru potențialul magnetic vector: $\nabla \mathbf{A} = 0$, în vederea unicității acestuia a condus la modificarea atât a ecuației:

$$\nabla \times [\nu \nabla \times \mathbf{A}] - \nabla [\nu \nabla \cdot \mathbf{A}] = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I}, \quad (3.144)$$

cât și la adăugarea unor noi condiții de frontieră:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= 0, \text{ pe } S_H, \\ \nu \nabla \mathbf{A} &= 0, \text{ pe } S_B. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Aceste ecuații conduc la următoarea formă slabă a problemei:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times \mathbf{A}] + \nabla \mathbf{W} [\nu \nabla \mathbf{A}]) \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Problema se poate rezolva și fără impunerea condiției de etalonare, dar atunci ea are următoarea formă slabă:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times \mathbf{A}] \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.147)$$

în care $\mathbf{T}$ este potențialul vector al densității de curent: $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$.

Următoarele funcționale de energie se minimizează în timpul iterațiilor neliniare:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nu |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \nu [\nabla \mathbf{A}]^2) \, d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.148)$$

pentru rezolvarea problemei etalonate, respectiv ne-etalonare:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Acestea sunt chiar ecuațiile rezolvate, în metoda punctului fix a magnetizației (duala metodei polarizației). În schimb, în metoda Newton se rezolvă la fiecare iterație sistemul liniarizat de ecuații generat de forma slabă:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})] \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \left[\mathbf{I} + \left(\frac{\partial H}{\partial B} - \nu \right) \nabla \times \Delta \mathbf{A} \right] \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.150)$$

în care $\Delta \mathbf{A}$ este corecția iterației anterioare, soluția sistemului liniar, $\partial H / \partial \mathbf{B}$ este reluctivitatea dinamică pentru câmpul corespunzător iterației anterioare. Vectorii $\mathbf{I}$ și $\mathbf{A}$ sunt soluția de la iterația anterioară. La prima iterație se presupune că $\mathbf{A} = \bar{0}$, $\mathbf{I} = \bar{0}$, deci $\partial H / \partial \mathbf{B}$ se calculează în origine și se notează cu ν , care rămâne constant pe toate iterațiile. În acest fel, prima iterație este de fapt o iterație de punct fix. În consecință, în metoda Newton îmbunătățită, pentru sporirea robusteții, la fiecare iterație se parcurg pașii:

- se generează sistemul de ecuații liniarizate și se rezolvă, calculându-se $\Delta \mathbf{A}$;
- dacă $F(\mathbf{A}_{k+1}) < F(\mathbf{A}_k)$, atunci se calculează noul potențial vector: $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \alpha \Delta \mathbf{A}$, cu $\alpha = 1$, altfel se determină factorul de subrelaxare $\alpha \in (0, 1)$, care minimizează aproximarea parabolică a funcției de $\alpha : F(\mathbf{A}_k + \alpha \Delta \mathbf{A})$;
- se calculează în fiecare element $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{H} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})$, reluctivitatea dinamică $\partial H / \partial \mathbf{B}$ și polarizația magnetică $\mathbf{I} = \mathbf{H} - \nu \mathbf{B}$;
- se calculează funcționala de energie și dacă nu este îndeplinită condiția de oprire:

$$\frac{F(\mathbf{A}_{k+1}) - F(\mathbf{A}_k)}{F(\mathbf{A}_k)} \leq 10^{-4} \quad (3.151)$$

se reia procesul iterativ.

Procesul iterativ devine unul de punct fix, dacă reluctivitatea dinamică și implicit matricea jacobian se estimează doar la prima iterație.

Deoarece fenomenul de histerezis are prin excelență un caracter dinamic, modelarea lui va fi discutată în capitolul următor dedicat problemelor evolutive.

3.6 Rezolvarea problemelor de câmp variabil în timp

Variația în timp a câmpului electromagnetic intervine în mai multe regimuri, cum sunt MQS, EQS sau ED. Problemele întâlnite în aceste regimuri se clasifică în patru mari categorii:

- probleme de regim tranzitoriu, în care soluția variază în funcție de timpul t , care aparține intervalului de interes $(t_{\min}, t_{\max})$, și în care se alege de obicei, în mod convențional $t_{\min} = 0$;
- probleme liniare în regim armonic, în care mărimile variază sinusoidal în timp, cu frecvența comună, și care se rezolvă prin reprezentare în complex;

- probleme de regim periodic permanent nesinusoidal, în care soluția este funcție de periodica de timp, cu perioada T ;
- probleme de valori proprii, în care interesează determinarea frecvențelor de rezonanță și a modurilor proprii de rezonanță ale dispozitivelor de microunde (cavități rezonante).

Aceste categorii de probleme se deosebesc fundamental, deoarece formularea, dar și metodele de rezolvare sunt total diferite. Doar problemele periodice se reduc, fie la rezolvarea problemelor armonice, fie la probleme tranzitorii. Indiferent de tipul problemei, analiza poate fi făcută fie în domeniul timpului, fie în domeniul frecvenței.

3.6.1 Câmpuri reprezentate în complex

S-a constatat anterior că după reprezentarea în complex, sau în operațional, prin transformata Laplace, ecuațiile de ordinul doi satisfăcute de potențiale, dar și de componentele câmpului devin ecuații cu derivate parțiale de tip Helmholtz complex. Ele pot fi scalare (de tip *div-grad*) sau vectoriale (de tip *rot-rot*). Ecuațiile care inițial erau de tip parabolic sau hiperbolic, acum au devenit de tip eliptic, iar timpul a dispărut din ele ca variabilă independentă, și inclusiv toate derivatele parțiale față de el. Aceste ecuații liniare se rezolvă cu metoda elementului finit, la fel cum sunt rezolvate ecuațiile cu derivate parțiale de tip eliptic, Laplace, Poisson sau formele lor generalizate. În cazul ecuațiilor scalare se pot folosi elementele finite nodale, iar în cazul vectorial sunt recomandabile elementele de muchie. Singura deosebire este că acum soluția este complexă și nu reală, iar funcționala biliniară devine o formă sesquiliniară. Trebuie să remarcăm că această abordare se poate aplica nu numai câmpurilor cu variație armonică în timp ci și la modelarea dispozitivelor liniare, în care câmpul are o variație în timp de formă mai complicată. De exemplu, acesta poate avea o variație periodică față de timp. În acest caz se folosește descompunerea în serie Fourier, iar atât componentele soluției într-un punct cât și componentele surselor, în loc să fie numere reale, se reprezintă printr-un șir de numere complexe (coeficienții seriei Fourier). Pentru fiecare armonică se rezolvă o ecuație de tip Helmholtz, corespunzătoare frecvenței respective. Bineînțeles că se trunchiază seriile la un număr finit de termeni, urmând ca ceilalți termeni, cu frecvențe în afara zonei de interes să fie neglijăți. Reprezentările operaționale în complex se pot aplica și unor variații în timp mai generale. Aplicând transformata Fourier (mai ales în varianta ei discretă sau rapidă - FFT, care este foarte eficientă din punctul de vedere al costului de calcul) sau transformata Laplace (mai exact aproximarea ei discretă, obținută prin cuadraturi numerice ale relațiilor de definiție sau de transformată inversă) se pot rezolva probleme liniare

cu variație în timp tranzitorie, cu condiții inițiale nule sau respectiv nenule. La fiecare frecvență, din cele care alcătuiesc rețeaua de frecvențe discrete, ecuațiile se rezolvă exact la fel cum s-au rezolvat ele în cazul câmpului cu variație armonica în timp, reprezentat în complex [68].

În literatură se întâlnesc multe exemple de analiză cu elemente finite a câmpului variabil armonic în timp, reprezentat în complex, mai ales în regimul MQS și în cel general variabil ED [12], [13],

[14], [19], [114], [11], [39], [90], [132], [99], [104], [63] pentru rezolvarea problemelor de curenți turbionari și cele de propagare, împrăștiere, antene, dispozitive de microunde, etc.

În problemele de propagarea undelor electromagnetice se întâlnește deseori necesitatea modelării spațiului fizic deschis, nemărginit. Pentru aceasta se folosește o frontieră fictivă, care marginește domeniul de calcul, dar de care unda electromagnetică ar trebui să fie absorbită și nu reflectată. Impunerea unei **condiții absorbante de frontieră**, care să satisfacă teorema de unicitate a câmpului nu este deloc simplă din punct de vedere matematic

(http://www.dam.brown.edu/scicomp/media/report_files/BrownSC-2002-pdf, <http://www.csc.kth.se/~olofr/NumPDE/EngquistMajda.pdf>).

În aplicații, se întâlnesc cel mai frecvent următoarele abordări, pentru această problemă:

- o condiție de frontieră (de tip Robin), cu impedanta distribuită superficial, cum este de exemplu condiția absorbanta (ABC = Absorbing Boundary Condition) a lui Mur [92];
- un strat fictiv cu proprietăți de material absorbante, condiție numită PML = Perfect Matched layer [132];
- așa cum în problemele statice și staționare, cea mai precisă modelare a domeniilor nemărginite se realizează prin operatorul Poincare-Steklov, discretizat prin cuplajul FEM-BEM, și în cazul general variabil există o abordare principial similară, dar în care relația dintre $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$ de pe frontieră este mai complicată fiind descrisă de un operator integral, care după discretizare cu elemente de frontieră-metoda momentelor (MOM - Method of Moments) generează o abordare FEM-MOM cunoscută și sub numele de FEM-EFIE sau FEM-MFIE, în care EFIE înseamnă Electric Field Integral Equation iar MFIE înseamnă Magnetic Field Integral Equation.[128].

În *regimul general variabil*, intensitatea câmpului electric satisface după reprezentarea în complex următoarea ecuație Helmholtz, la care pentru a asigura unicitatea

soluției au fost adăugate condiții de frontieră de tip Dirichlet pe o parte S_E a frontierei, pe care este cunoscută componenta tangențială a câmpului electric și de tip Robin, în rest pe S_H :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{J}^s \text{ în } \Omega; \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{P} \text{ pe } S_E; \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \gamma \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{Q} \text{ pe } S_H.\end{aligned}\quad (3.152)$$

Dacă în această ecuație se alege $\varepsilon = 0$, atunci se obține cazul regimului MQS, iar dacă $\sigma = 0$, atunci se obține ecuația regimului electrodinamic fără pierderi (EDFP), care iată este o ecuație Helmholtz cu coeficienți reali, deoarece $\mathbf{J}_s$ poate fi pur imaginar.

Dacă această ecuație este înmulțită în produs scalar cu funcțiile de test $\mathbf{W}_i$, și integrată apoi pe domeniul de calcul, rezultă după aplicarea relației lui Gauss, forma slabă a ecuației Helmholtz:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{W}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{E}] d\mathbf{x} + \\ + \int_{S_H} \mathbf{W}_i (\mathbf{Q} - \gamma \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) dS = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{J}^s d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (3.153)$$

Diferența fundamentală față de cazul scalar este că acum se utilizează în locul funcțiilor de bază nodale, elementele de muchie $\mathbf{W}_i = \mathbf{N}_i(\mathbf{r})$ și soluția este combinația liniară a acestor elemente de muchie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_e} E_j \mathbf{N}_j(\mathbf{r}) \quad (3.154)$$

în care E_j sunt gradele de libertate, egale cu tensiunea electrică de-a lungul celor N_e muchii ale rețelei de discretizare, cu excepția celor de pe S_E , pe care este specificată condiția esențială de frontieră. Forma slabă a ecuației este acum un sistem de ecuații algebrice liniare, complexe $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, în care:

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \int_S [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j] d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{S_H} \gamma (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_i) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j) dS, \\ z_j &= E_j, \\ b_i &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}^s d\mathbf{x} - \int_{S_H} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{Q} dS.\end{aligned}\quad (3.155)$$

Concluzia acestei prezentări este că rezolvarea problemelor reprezentate în complex este similară cu rezolvarea problemelor de regim magnetic staționar, deosebirea constând în faptul că în loc să se rezolve un sistem liniar de ecuații reale se rezolva unul de ecuații complexe. Similitudinea dintre expresiile () și (3.25) pune în evidență faptul ca matricea de rigiditate are aceeași structură în ambele cazuri, fiind una rară și simetrică.

Ecuatiile satisfăcute de cele două potențiale în **regimul MQS** sunt:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma (j\omega + \nabla \phi) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma (j\omega + \nabla \phi) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{J}^s &= 0.\end{aligned}\tag{3.156}$$

Acestea se rezolvă în mod natural, folosind elemente de muchie pentru potențialul vector $\mathbf{A}$ și elemente nodale scalare pentru potențialul electric scalar $V = \phi$. În ciuda dificultăților numerice întâmpinate, multe pachete comerciale de elemente finite au adoptat calea mai comodă, de a folosi elemente nodale și pentru reprezentarea celor trei componente ale potențialului vector $\mathbf{A}$.

După cum s-a văzut un artificiu pentru evitarea dificultăților constă în folosirea următorarei ecuații care întărește condiția de etalonare Coulomb:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \phi) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \phi) &= 0.\end{aligned}\tag{3.157}$$

Cu acest artificiu, operatorul augmentat are caracteristici care îl aproprie de operatorul Laplace (în sensul că se reduce dimensiunea spațiului nul). Dacă se aplică ∇ primei ecuații, se obține consecința

$$\nabla^2 \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,\tag{3.158}$$

deci $\nabla \mathbf{A}$ satisface ecuația lui Laplace, iar dacă $\nabla \mathbf{A}$ este nul pe frontieră, atunci $\nabla \mathbf{A}$ se anulează, și termenul adăugat la ecuație este și el nul. În consecință, adăugarea acestui termen nu afectează corectitudinea ecuației. De fapt el nu este nul pentru modurile fictive de oscilație, corespunzătoare unor valori proprii parazite mici, cărora li se forțează anularea prin adăugarea acestui termen. Un alt avantaj al eliminării valorilor proprii parazite constă în îmbunătățirea numărului de condiționare al matricei de rigiditate, ceea ce face ca rezolvarea iterativă a sistemului liniar să fie mult mai rapidă.

Celălalt dezavantaj, referitor la erorile din zonele în care μ are salturi dispare, doar prin folosirea elementelor de muchie. Adăugarea termenului penalizator,

care etaloanează potențialul vector funcționează bine la frecvențe mici, deci și în regim staționar, dar la frecvențe înalte, matricea devine tot mai slab condiționată. Soluția găsită pentru a elimina acest comportament nedorit este de-a dreptul paradoxală, și anume să se renunțe de tot la etalonare. Acesta face ca matricea să devină singulară, dar era cunoscut faptul că unele metode iterative rezolvă cu succes sisteme liniare nedeterminate, cu condiția ca termenul liber să fie compatibil (să nu aibă proiecție pe spațiul nul al matricei sistemului). Această condiție poate fi îndeplinită dacă $\mathbf{J}^s$ este perfect solenoidal, condiție verificată, dacă se folosește în locul sursei $\mathbf{J}^s$, potențialul său vector $\mathbf{J}^s = \nabla \times \mathbf{T}$, care face ca $\mathbf{J}^s$ să aibă $\nabla \cdot \mathbf{J}^s = 0$. *Problemele neetalonate* au condus la scăderea drastică a numărului de iterații efectuate de solvele iterative de tip Krylov [104], [14]. Prin îmbunătățirile pe care eliminarea etalonării le aduc spectrului matricei de rigiditate, putem spune că această abordare acționează ca o preconditionare eficientă a rezolvării iterative.

Pentru a ilustra diversitatea aplicațiilor și a rezultatelor, ce se pot obține cu metoda elementului finit, în Fig. 3.25 este reprezentată distribuția superficială de curent generată de o antenă plasată la suprafața unui avion. Acest rezultat a fost obținut cu pachetul ANSYS HFSS, bazat pe FEM în domeniul frecvenței, și care pentru rezolvarea problemei 3D, în regim ED armonic pe un sistem de calcul cu 16 procesoare a folosit descompunerea în sudomenii, metoda ce va fi prezentată în detaliu în subcapitolul următor.

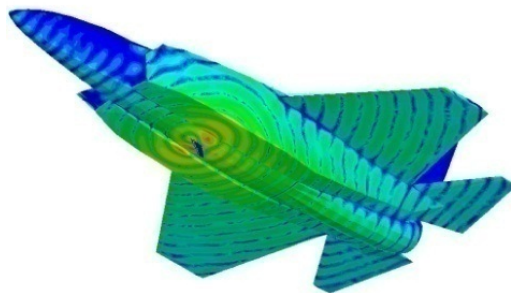


Figura 3.25: Aplicație aeronautică (<http://www.ansys.com/>)

În Fig. 3.26 este reprezentată distribuția câmpului electric în interiorul creierului unui pacient, modelată cu metoda elementelor finite, pornind de la datele geometrice extrase din datele culese de un tomograf MRI.

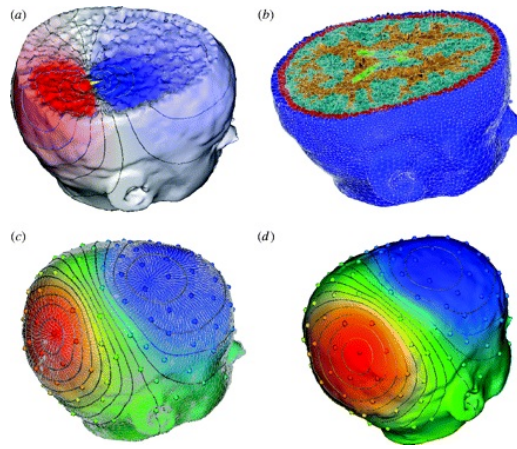


Figura 3.26: Aplicație bio-medicală
(<http://rsta.royalsocietypublishing.org/>)

3.6.2 Frecvențe și moduri proprii de rezonanță

O categorie de probleme de mare interes pentru aplicațiile electromagnetismului de înaltă frecvență este cea a determinării modului în care se distribuie câmpul electromagnetic, în cavitățile rezonante și a spectrului ce conține frecvențele la care are loc rezonanța. Din punct de vedere fizic, problema se referă la un domeniu mărginit, în interiorul căruia conductivitatea este nulă, permeabilitatea μ și permitivitatea ε sunt funcții pozitive de punct, iar frontiera este supraconductoare, deci pe ea câmpul electric tangențial este nul: $\mathbf{E}_t = 0$.

Într-un astfel de sistem, câmpul electromagnetic nu are soluție unică, pot exista o infinitate de distribuții de câmp armonic, fiecare corespunzătoare unei frecvențe de rezonanță, proprii cavității. Scopul analizei este de a determina cât mai multe dintre aceste frecvențe, începând de la cea mai mică.

Ecuatiile câmpului electromagnetic din interiorul cavității au forma:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla(\mu\mathbf{H}) &= 0, \\ \nabla(\varepsilon\mathbf{E}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.159}$$

iar problema formulată este să se determine pulsațiile ω , pentru care aceste ecuații au soluție nenulă, și modul în care câmpul electromagnetic, cu condiția de frontieră $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ pe $\partial\Omega$ este distribuit în domeniul Ω . Eliminând câmpul magnetic,

rezultă ecuațiile satisfăcute de câmpul electric:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} &= \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}, \text{ in } \Omega \\ \nabla \varepsilon \mathbf{E} &= 0, \text{ in } \Omega \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0, \text{ pe } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{3.160}$$

Forma variațională a acestei probleme se enunță astfel: găsiți $\lambda > 0$ și $\mathbf{u} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$, astfel încât:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega). \tag{3.161}$$

Folosind spațiul $V_{h,p}(\mathcal{T}_h) \in H(\text{rot}, \Omega)$ al elementelor finite rot-conforme, problema capătă următoarea form discretă: Să se găsească $\lambda_h > 0$ și $\mathbf{u} \in V_{h,p}(\mathcal{T}_h)$ astfel încât:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}_h \cdot \nabla \times \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \lambda_h \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{h,p}(\mathcal{T}_h). \tag{3.162}$$

Folosind pentru soluție expresia

$$\mathbf{u} = \sum u_i \varphi_i \tag{3.163}$$

în care $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq N\}$ este o bază FEM pentru $V_{h,p}(\mathcal{T}_h)$, problema capătă următoarea formă algebrică: găsiți $\lambda > 0$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, a.î. $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{u}$, în care $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ este o matrice simetrică pozitiv semidefinită (numită "de rigiditate") iar $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ este o matrice simetrică pozitiv definită. (numită "de masă"). Elementele matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{M}$ se calculează și se asamblază, așa cum s-a arătat în capitolele anterioare.

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \int_S [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j] \, d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{S_H} \gamma (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_i) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j) \, dS, \\ z_j &= E_j, \\ b_i &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}^s \, d\mathbf{x} - \int_{S_H} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{Q} \, dS.\end{aligned}\tag{3.164}$$

Problemele electromagnetice de moduri de oscilație proprii se reduc deci prin MEF la rezolvarea unor probleme algebrice liniare, de valori și vectori proprii ale unor matrice simetrice și pozitiv definite. Matricea $\mathbf{A}$ are un spațiu nul relativ extins, fiind asociat câmpurilor gradient. Matricele generate de metoda elementului

finit pentru operatorii *rot-rot* sunt rare, de dimensiuni foarte mari și prost condiționate. Aceste caracteristici fac ca algoritmi clasici pentru determinarea valorilor și vectorilor proprii ale unei matrice să nu poată rezolva problema în mod robust. Nici algoritmi iterativi nu sunt potriviți, în acest caz, deoarece matricele sunt prost condiționate. Soluția găsită pentru rezolvarea problemei a fost folosirea unei metode iterative de tip Gradienți Conjugați, preconditionați cu multigrid. Pentru a obține precizia dorită, trebuie să se folosească rafinarea autoadaptivă *hp*, dar o mare importanță o are folosirea funcțiilor de bază conforme cu secvența de Rham [63], [133].

Importanța problemelor de valori proprii ale ecuațiilor lui Maxwell, este ilustrată în Fig. 3.27, în care se prezintă rezultatul modelării câmpului electromagnetic dintr-o cavitate rezonantă, folosită pentru acceleratoarele de particule. Alte rezultate similare sunt disponibile la (https://slacportal.slac.stanford.edu/sites/ard_public/bpd/acd/Pages/acmod.aspx).

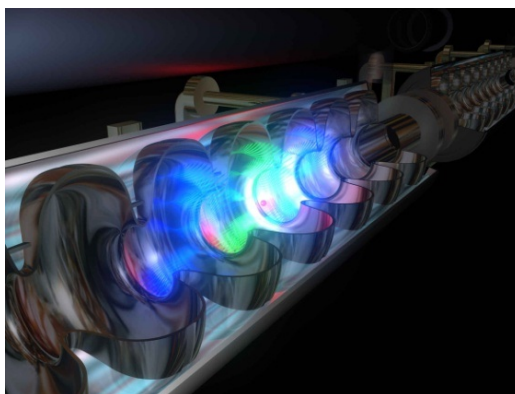


Figura 3.27: Rezultatul modelării unei cavități rezonante (dasy.de)

3.6.3 Câmpuri în regim tranzitoriu

Analiza câmpului electromagnetic în domeniul timpului se efectuează de obicei în cazul problemelor de regim MQS și ED. Dacă mediile sunt neliniare, în regim tranzitoriu, analiza în frecvență nu poate fi aplicată rămânând ca analiza în domeniul timpului să fie câmpului în cele două regimuri au deosebiri fundamentale, în regim MQS ele sunt de natură parabolică, iar în ED sunt de natură hiperbolică. Aceasta face ca în al doilea caz să apară *fenomene de propagare*, cu viteză finită, și cu posibilitatea definirii frontului de undă, în timp ce în primul caz apar *fenomene de difuzie*, câmpul distribuindu-se teoretic instantaneu în întreg spațiu. În cazul MQS nu se poate defini viteza de propagare sau lungimea de undă, în schimb se definesc: adâncimea de pătrundere și constanta de timp echivalentă de difuzie.

În **regim general variabil fără pierderi (EDFP)**, câmpul electromagnetic este descris de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic, de forma:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= 0, \text{ pe } S_E; \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} &= 0, \text{ pe } S_H; \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \text{ in } \Omega, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \mathbf{E}'_0(\mathbf{r}), \text{ in } \Omega.\end{aligned}\tag{3.165}$$

la care sunt adăugate condiții de frontieră (pentru $\mathbf{E}_t$ sau $\mathbf{H}_t$), dar și două condiții inițiale, una pentru intensitatea câmpului și alta pentru derivata ei față de timp, la momentul $t = 0$.

Dacă se presupune că soluția numerică se exprimă folosind elemente de muchie $\mathbf{N}_j$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_e} E_j(t) \mathbf{N}_j(\mathbf{r}),\tag{3.166}$$

gradele de libertate alcătuiesc un vector cu componentele $E_j, j = 1, \dots, N_e$, dependente de timp. Aplicând proiecția Galerkin a ecuației (3.165) pe spațiul elementelor de muchie se obține *sistemul de ecuații diferențiale ordinare*:

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(t) + c_0^{-2} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}\tag{3.167}$$

în care $c_0^2 = 1/(\varepsilon\mu)$ este viteza de propagare, $\mathbf{S}$ este matricea de rigiditate, $\mathbf{M}$ este matricea de masă cu elementele având expresiile cunoscute pentru elementele de muchie, iar $\mathbf{z}$ este vectorul gradelor de libertate, ce identifică evoluția în timp a soluției problemei. Metoda numerică standard pentru rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații se bazează pe discretizarea cu diferențe finite a derivatei față de timp. Folosind de exemplu, diferențe finite centrate, rezultă:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}) = -(c_0 \Delta t)^2 \mathbf{S}\mathbf{z}^n,\tag{3.168}$$

care este o metodă implicită, deoarece la fiecare pas de timp $n = 1, 2, 3, \dots$, trebuie rezolvat un sistem liniar cu matricea $\mathbf{M}$. La primul pas $\mathbf{z}^1$ și $\mathbf{z}^0$ sunt calculate pornind de la condițiile inițiale. Această metodă de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale ordinare este stabilă, doar în *condiția CFL* http://en.wikipedia.org/wiki/Courant-Friedrich-Lewy_condition, dacă

pasul de timp $\Delta t \leq 2/\omega_{\max}$, în care $\omega_{\max}$ este pulsația proprie maximă a sistemului: $-\mathbf{S}\mathbf{z} = (\omega_{c_0})^2 \mathbf{M}\mathbf{z}$. Deoarece metoda de referință pentru rezolvarea ecuațiilor Maxwell în domeniul timpului este metoda FDTD (Finite Difference Time Domain) (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite-difference_time-domain_method), MEF ar trebui comparată cu aceasta. Cea mai importantă dificultate a aplicării MEF în rezolvarea problemeleor de regim tranzitoriu este cea referitoare la necesitatea "inversării" matricei de masă la fiecare iterație. Dificultatea poate fi eliminată, dacă se folosește o aproximare diagonală a matricei $\mathbf{M}$, tehnică numită a *concentrării masei*. Această abordare funcționează bine, mai ales în cazul rețelelor hexedrale sau dreptunghiulare, caz în care performanțele metodei se aproprie de cele ale FDTD. Totuși condiția CFL limitează mărimea pasului de timp și conduce la creșterea efortului de calcul necesar simulării. O soluție este să se folosească metode mai puternic implicate, cum este metoda Newmark, în care la fiecare pas de timp se rezolvă sistemul:

$$\mathbf{M} (\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}) = -(c_0\Delta t)^2 \mathbf{S} [\theta\mathbf{z}^{n+1} + (1 - 2\theta)\mathbf{z}^n + \theta\mathbf{z}^{n-1}] \quad (3.169)$$

metoda stabilă pentru orice valoare a pasului de timp Δt , dacă parametrul $\theta \geq 1/4$ (acest parametru se alege de obicei $\theta = 1/2$). Evident că atunci când pasul de timp este prea mare, soluția numerică se abate mult de la soluția exactă. Este interesant de remarcat faptul că această schemă de cuadratură este rezultatul aplicării proiecției Galerkin și a MEF pentru variația față de timp

[14]. Putem spune deci că relația (3.169) reprezintă discretizarea cu FEM, atât din punct de vedere spațial cât și temporal a ecuațiilor câmpului electromagnetic.

O altă abordare posibilă este cea care folosește metoda Runge-Kutta

(http://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods) pentru integrarea numerică, în domeniul timpului a sistemului de ecuații diferențiale ordinare, obținut prin discretizarea spațială cu MEF.

În **regim quasistaționar indusiv (MQS)**, câmpul electromagnetic este descris de ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, de forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.170)$$

la care se adaugă condițiile de frontieră prezentate anterior și condiția inițială, referitoare la distribuția potențialului magnetic vector $\mathbf{A}$, în tot domeniul de calcul, la momentul inițial $t = 0$.

Dacă se presupune că potențialul magnetic vector se exprimă folosind elemente

de muchie $\mathbf{N}_j$, iar potențialul scalar prin elemente finite nodale:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_e} A_j(t) \mathbf{N}_j(r), \quad V(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_n} V_j(t) \phi_j(\mathbf{r}), \quad (3.171)$$

și se aplică ecuației proiecția Galerkin pe spațiul elementelor finite, se obține sistemul de ecuații diferențiale ordinare:

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(t) + \mathbf{M} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(t); \quad \mathbf{A}\mathbf{v}(t) = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt}, \quad (3.172)$$

în care $\mathbf{S}$ și $\mathbf{A}$ sunt matrice de rigiditate, pentru elemente de muchie respectiv pentru cele nodale, $\mathbf{M}$ este matricea de masă, $\mathbf{G}$ și $\mathbf{B}$ sunt matrice ce ponderează derivatele spațiale, iar $\mathbf{z}(t)$ și $\mathbf{v}(t)$ sunt gradele de libertate corespunzătoare potențialului vector (tensiunile pe muchii) și respectiv ale celui scalar (valorile în noduri).

Și în acest caz se obține tot un sistem de ecuații diferențiale ordinare, care se rezolvă prin integrare numerică în timp, cu diferențe finite. De această dată însă, cele mai simple abordări sunt schema Euler progresivă, regresivă sau combinația lor:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n)/\Delta t + \mathbf{S}(\theta \mathbf{z}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{z}^n) + \mathbf{G}(\theta \mathbf{v}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{v}^n) &= \\ &= (\theta \mathbf{b}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{b}^n), \end{aligned} \quad (3.173)$$

care pentru $\theta = 0$ este metoda progresivă, pentru $\theta = 1$ este metoda regresivă, iar pentru $\theta = 1/2$ este metoda Crank-Nicholson. Metoda de integrare în timp prezentată este necondiționat stabilă, pentru orice $\theta \in [1/2, 1]$ [120]. Pentru $\theta < 1/2$, deci inclusiv în cazul Euler progresiv, metoda de integrare este stabilă, doar dacă pasul de timp este suficient de mic:

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{6(1 - 2\theta)}(1 - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.174)$$

În regimul general variabil cu pierderi (ED), câmpul electric satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \sigma \cdot \mathbf{E} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^{ext} - \nabla \times (\mu^{-1} \cdot \mathbf{K}^{ext}) \quad (3.175)$$

în care $\mathbf{J}^{ext}$ și $\mathbf{K}^{ext}$ sunt sursele de câmp, densitatea de curent electric (rotorul câmpului magnetic) și de "curent magnetic" (rotorul câmpului electric), de regulă nul. Se constată că ecuația are un termen de propagare (derivata dublă față de timp), unul de difuzie (derivata simplă față de timp) și un operator (de tip *rot-rot*) de derivare spațială. În [92] se propune ca soluția FEM să se exprime sub forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_j e_{i,j}(t) \mathbf{W}_{i,j}^{(C,E)}(\mathbf{x}) \quad (3.176)$$

în care $\mathbf{W}$ sunt funcțiile de bază nodale (C) utilizate în domeniile de omogenitate sau de muchie (E), utilizate pe interfețele între mediile omogene. După proiecția Galerkin, ecuația câmpului se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale ordinare de forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{W}_{i,j} dV + \\
& + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \sigma \cdot \mathbf{W}_{i,j} dV + \\
& + \sum_{i,j} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{W}_{p,q}) \cdot \mu^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_{i,j}) dV = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} - \\
& - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \mathbf{J}^{ext} dV - \\
& - \int_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{W}_{p,q}) \cdot \mu^{-1} \cdot \mathbf{K}^{ext} dV, \quad \forall p, q.
\end{aligned} \tag{3.177}$$

Pentru a asigura caracterul solenoidal al inducției electrice, la aceste ecuații se mai adaugă și condiția:

$$\sum_{i,j} e_{i,j} \int_{\mathcal{T}} (\nabla \cdot \mathbf{W}_{p,q}) \cdot |\varepsilon \cdot \mu|^{-1} \cdot \nabla (\varepsilon \mathbf{W}_{i,j}) dV, \quad \forall p, q. \tag{3.178}$$

Este evident că sistemul de ecuații diferențiale ordinare obținut acum prin discretizarea cu FEM are forma:

$$\mathbf{M}_\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}(t) + \mathbf{M}_\sigma \frac{d}{dt} \mathbf{e}(t) + \mathbf{M}_\mu \mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t). \tag{3.179}$$

Cele trei matrice sunt: $\mathbf{M}_\mu$ - matrice de rigiditate, $\mathbf{M}_e$ - matrice de masă și $\mathbf{M}_\sigma$ - matrice de amortizare. În regimul MQS, $\mathbf{M}_e = 0$, deci ecuația nu conține termenul cu derivata dubă în timp, iar în regim EDFP, $\mathbf{M}_\sigma = 0$, deci ecuația nu conține termenul cu derivata de ordinul întâi în timp.

Un program MATLAB pentru rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell în regim tranzitoriu, folosind elemente nodale sau elemente de muchie este disponibil la

(http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=75).

Dintre pachetele de programe software pentru analiza cu MEF, menționăm GetDP ("*General environment for the treatment of Discrete Problems*"), care este un mediu general de tratare numerică a problemelor științifice, folosind elemente finite

mixte pentru a discretiza secvența de Rham în 1D, 2D sau 3D.

Caracteristica acestui mediu constă în posibilitatea de a defini simbolic (prin fișiere de text scrise în limbaj propriu) problema de rezolvat: forma slabă a ecuațiilor și spațiul finit dimensional al soluției numerice. Instrumentele numerice sunt tratate ca obiecte software. GetDP se poate aplica la rezolvarea numerică a ecuațiilor integro-diferențiale, inclusiv a problemelor fizice cuplate (electromagnetice, termice, etc.) în diferite regimuri (statice, staționare, tranzitorii, armonice) (<http://geuz.org/getdp/>). De altfel, utilizarea tehnicilor programării orientate pe obiecte este subiectul mai multor lucrări și proiecte (<http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/bem/oop/mackerle.pdf>, <http://www.oofem.org/en/oofem.html>, <http://www.calpoly.edu/~garcher/archer.pdf>, http://oatao.univ-toulouse.fr/5378/1/Pantale_5378.pdf, <http://www.fetk.org/>, <http://fetk.org/codes/mc/>, <http://fetk.org/codes/mclite/>, <http://www.dealii.org/>, <http://www.ofeli.net/>).

3.6.4 Câmpuri variabile în medii nelinare și cu histerezis

În multe aplicații este necesară modelarea unor mașini și aparate electrice, care funcționează la frecvență industrială și care conțin piese feromagnetice. Chiar dacă sunt neliniare din punct de vedere magnetic, acestea sunt modelate de multe ori ca medii liniare, cu $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, în care μ este permeabilitatea dinamică inițială, pentru, $\mathbf{H} = 0$. Deoarece aceasta abordare nu ia în considerare saturația magnetică, ea este acceptabilă doar pentru câmpuri mici. Tehnica a fost extinsă pentru a considera și fenomenul de histerezis. Utilizând o permeabilitate complexă, se obține o modelare aproximativă a pierderilor prin histerezis, aproximând de fapt ciclul cu unul de forma eliptică (în regim armonic, atât $\mathbf{B}$ cât și $\mathbf{H}$ variază sinusoidal în timp, deci dacă sunt defazate dependența dintre ele se reprezintă în planul $B - H$ printr-o elipsă).

Abordarea liniară, chiar dacă este simplă, nu este satisfăcătoare la câmpuri mai mari, atunci când neliniaritățile materialelor feromagnetice devin importante. Datorită lor, mărimile nu mai au variație perfect sinusoidală în timp, dar rămân totuși cu variație în timp periodică, permanentă, deformată, nesinusoidală. De regulă abaterea de la sinusoidă nu este foarte mare, ceea ce face posibilă analiza folosind serii Fourier trunchiate la un număr relativ mic de armonici (maxim 5 – 10, și mai rar până la 100). Analiza câmpului magnetic MQS în domenii feromagnetice cu metoda analizei armonice reprezintă un instrument puternic pentru multe aplicații electrotehnice industriale. Fiind o problemă neliniară, abordarea este cunoscută și sub numele de metoda *balanței armonice*, deoarece se analizează fiecare armonică în parte, relația constitutivă, de material făcând legătura dintre armonici, asigură echilibrul armonic [35], (<http://en.wikipedia.org/wiki/>

Harmonic_balance. Câmpul electromagnetic satisface ecuațiile fundamentale ale acestui regim, care datorită caracteristicilor de magnetizare devin ecuații neliniare. Analiza numerică a acestui câmp se poate realiza cu MEF, urmând ca sistemul de ecuații diferențiale ordinare neliniare, generat de proiecția Galerkin să fie rezolvat printr-o metodă numerică, pentru a găsi o soluție periodică. Aceasta poate fi determinată, fie prin metoda balanței armonice, fie prin *metoda balistică* ("shooting method"), care constă în simularea iterativă a regimului tranzitoriu al sistemului, pe parcursul unei (semi)perioade, pornind de la condiții inițiale arbitrare și apoi folosind valoarea variabilelor de stare după o perioadă, se iterează condiția inițială, până când aceasta ajunge să fie egală cu valoarea sa după o perioadă

[97]. Indiferent de metoda folosită pentru determinarea câmpului (în domeniul timpului sau în domeniul frecvenței), această analiză este reluată într-un ciclu de iterații neliniare, până când este îndeplinit criteriul de oprire (referitor la abaterea de la periodicitate, care trebuie să fie suficient de mică). Iterațiile neliniare au la bază fie metoda punctului fix, fie metoda Newton sau variante ale acestora.

În [57] se prezintă o metodă eficientă pentru analiza curenților turbionari cu variație periodică în timp, în medii neliniare din punct de vedere magnetic. Abordarea este bazată pe metoda punctului fix al polarizației și pe descompunerea Fourier a variației periodice în timp a magnetizației. Ecuațiile câmpului se rezolvă independent pentru fiecare armonică, iar apoi se sumează seria Fourier a inducției magnetice, funcție care trecută prin caracteristica de magnetizare determină variația în timp a magnetizației. Aceasta este descompusă în serie Fourier trunchiată pentru a determina armonicile magnetizației, care devin surse de câmp în iterația următoare. Următorul procedeu iterativ de tip Picard-Banach:

$$\dots \mathbf{M}^{(n-1)} \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbf{M}_a^{(n-1)} \xrightarrow{\mathbf{T}} \mathbf{B}^{(n)} \xrightarrow{\mathbf{G}} \mathbf{M}^{(n)} \dots \quad (3.180)$$

converge către soluția problemei, care este punctul fix al aplicației $\mathbf{W} = \mathbf{S} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{G}$, unde $\mathbf{S}$ este operatorul contractiv de trunchiere a seriei Fourier, $\mathbf{T}$ este operatorul neexpansiv care indică inducția $\mathbf{B}$ - soluție a problemei de câmp, obținută printr-o metodă numerică, pornind de la sursele câmpului, printre care și magnetizația $\mathbf{M}$ de la iterația anterioară, iar $\mathbf{G}$ este operatorul contractiv, care descrie caracteristica de magnetizare (magnetizația $\mathbf{M}$ în funcție de inducția $\mathbf{B}$). Aici s-a folosit magnetizația $\mathbf{M} = \nu \mathbf{I}$, în locul polarizației magnetice $\mathbf{I} = \mu \mathbf{M}$, schimbare ce nu modifică esența procesului iterativ, cât timp "intrarea" în caracteristica de magnetizare se face prin $\mathbf{B}$ iar $\mu = 1/\nu$ este o constantă ce reprezintă permeabilitatea "de calcul".

Spre deosebire de metoda Newton, metoda punctului fix folosește o permeabilitate "de calcul", care este menținută constantă pe toată durata iterațiilor, neliniaritatea caracteristicii de magnetizare fiind transferată în neliniaritatea relației constitutive

B – M. Astfel, la fiecare iterație, neliniaritatea devine sursă de câmp într-o problemă virtuală, liniară, care se rezolvă în domeniul frecvenței.

Metoda punctului fix a polarizației sau cea a magnetizației are avantajul că poate fi extinsă pentru a fi aplicată și materialelor cu histerezis magnetic. Dintre modelele de histerezis magnetic, cel cu precizie acceptabilă pentru materialele feromagnetice este modelul Preisach, descris de o relație de forma:

$$y(t) = \iint_{\alpha \leq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma(\alpha, \beta, x(t)) d\alpha d\beta \quad (3.181)$$

în care, în modelul direct $x = H(t)$ este intensitatea câmpului magnetic iar $y = B(t)$ este inducția magnetică. Dacă $x = B$ și $y = H$, atunci modelul de histerezis se numește invers. În relația Preisach, variabilele α și β sunt câmpurile de comutație ale histeronului rectangular, iar $\mu(\alpha, \beta)$ este funcția de distribuție, caracteristica fiecărui material, în timp ce γ este caracteristica histeronului elementar (http://en.wikipedia.org/wiki/Preisach_model_of_hysteresis - Fig. 3.28. Relația (3.181) exprimă semnalul de ieșire $y(t)$ ca o medie ponderată a semnalelor de ieșire ale unei mulțimi de histeroni elementari cu diferiți parametri.

Un model mai simplu, care elimină necesitatea dublei integrale și o aproximează

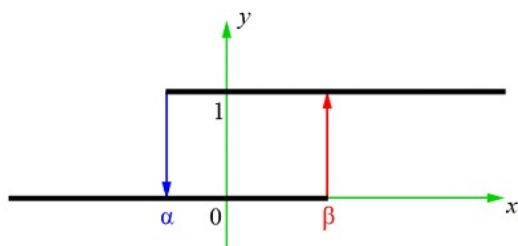


Figura 3.28: Caracteristica histeronului elementar

cu o sumă este cel descris de relația:

$$y(t) = -E(\alpha_0, \beta_0) + 2 \sum_{k=1}^K [E(\alpha_k, \beta_{k-1}) - E(\alpha_k, \beta_k)] \quad (3.182)$$

caracterizat de funcția Everett $E(\alpha, \beta)$. În [79] se prezintă o procedură de măsurare a acestei funcții și implicit de determinare experimentală a modelului de histerezis al materialelor anizotrope.

Modelul extras cu aceasta tehnică a fost apoi folosit, pentru a calcula distribuția câmpului magnetic din transformatorul reprezentat în Fig. 3.29. Rezultatele numerice obținute, comparate cu cele măsurate sunt prezentate în Fig. 3.30.

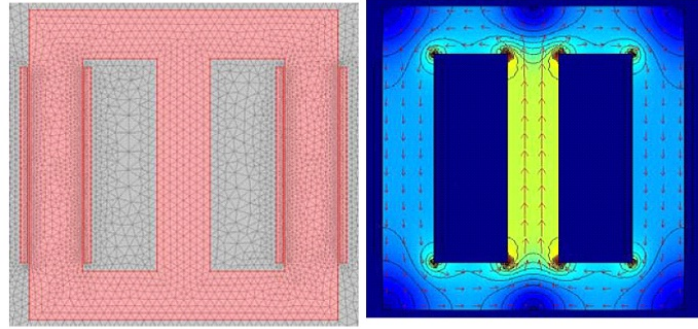


Figura 3.29: Vizualizarea rezultatelor unui dispozitiv analizat cu FEM [84]

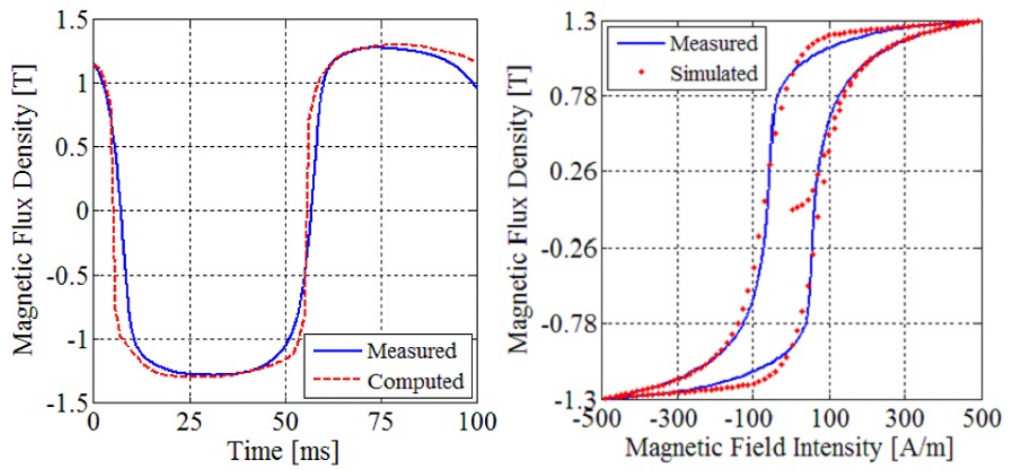


Figura 3.30: Ciclul de histerezis și variația în timp a inducției magnetice [84]

Problema a fost rezolvată cu MEF, pentru potențialul magnetic redus Φ al intensității câmpului magnetic:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla\Phi, \quad (3.183)$$

care satisface ecuațiile:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu_0 \nabla\Phi) &= \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{T}_0), \text{ in } \Omega_0 \text{ - cu material ne-magnetic} \\ \nabla \cdot (\mu_{FP} \nabla\Phi) &= \nabla \cdot (\mu_{FP} \mathbf{T}_0) + \nabla \cdot \mathbf{R}, \text{ in } \Omega_m \text{ - cu material magnetic;} \end{aligned} \quad (3.184)$$

în care $\mathbf{T}_0$ este potențialul vector al densității de curent $\nabla \times \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_0$, iar $\mathbf{R}$ este "reziduul" punctului fix, definit de

$$\mathbf{B}\{\mathbf{H}\} = \mu_{FP} \mathbf{H} + \mathbf{R}, \text{ in } \Omega_m, \quad (3.185)$$

unde s-a notat cu $\mathbf{B}\{\mathbf{H}\}$ relația de histerezis magnetic, iar cu $\mu_{FP} = (\mu_{\max} + \mu_{\min}) / 2$, permeabilitatea de calcul.

Iterațiile neliniare prin metoda punctului fix al magnetizației, folosind un model direct de histerezis au avut următorii pași:

- Se generează matricea $\mathbf{K}$ a sistemului liniar de ecuații, care nu se modifică pe parcursul iterațiilor;
- Folosind reziduul $\mathbf{R}$ se determină termenul liber $\mathbf{b}$ al sistemului de ecuații;
- Se rezolvă sistemul liniar $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, determinându-se vectorul $\mathbf{x}$ al potențialului magnetic redus din noduri;
- Se calculează intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla\Phi$, din fiecare element, și apoi din operatorul Preisach, aplicat o singură dată pe fiecare element se determină inducția magnetică $\mathbf{B}$.
- Se actualizează reziduul $\mathbf{R}$ din fiecare element, plasat în domeniul feromagnetic.
- Se determină eroarea soluției numerice. Folosind reziduul $\mathbf{R}$ din ultimele două iterații se calculează $\|\mathbf{H}_n - \mathbf{H}_{n-1}\|$, iar dacă este mai mic decât o abatere acceptabilă, atunci calculele se opresc, altfel ele se reiau de la pasul al doilea.

Calcululele au fost efectuate în MATLAB, folosind funcții oferite de pachetul COM-SOL, pe un calculator cu un procesor dual AMD și 32 GB RAM. Perioada de timp a fost divizată în 72 pași, iar rețeaua de discretizare spațială 2D a avut cca. 10.000 elemente triunghiulare cu 50.000 grade de libertate.